

การหาสูตรคำนวณพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

โดย... นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ
เว็บมาสเตอร์ “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์”

22 กรกฎาคม พ.ศ. 2550

บทความฉบับปฐมฤกษ์ของมุมมองความรู้ “สะกิดคณิตศาสตร์” ซึ่งเผยแพร่บน “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” ฉบับนี้ ผู้เขียนจะขอแนะนำการหาสูตรคำนวณพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งผู้เขียนเชื่อว่าหลายๆ คนอาจไม่เคยทราบมาก่อนเลยว่ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็มีสูตรการคำนวณพื้นที่เหมือนกับเพื่อนๆ รูปเรขาคณิตด้วยกัน เราคงทราบมาแล้วว่ารูปสามเหลี่ยมต่างๆ ไปนั้นเรามีสูตรคำนวณพื้นที่อยู่แล้ว ซึ่งก็คือ

$$A = \frac{1}{2} \times \text{ส่วนสูง} \times \text{ความยาวฐาน}$$

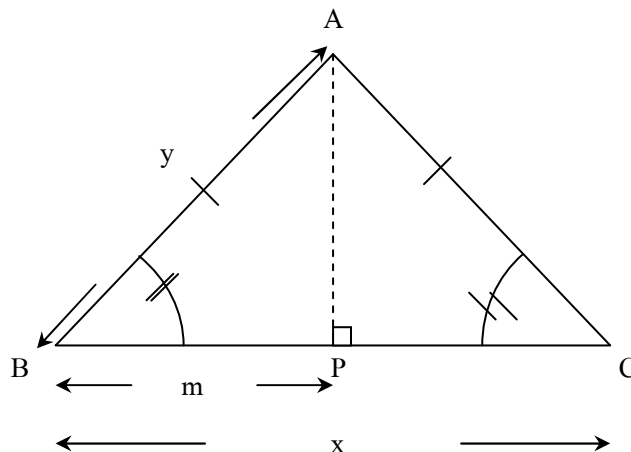
ในเมื่อ $A =$ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

ซึ่งในกรณีต่างๆ ไปนั้น รูปสามเหลี่ยมที่สามารถคำนวณหาพื้นที่ได้ตามสูตรดังกล่าวจะต้องมีเงื่อนไขจำนวน 2 ประการก็คือ ส่วนสูงและความยาวฐานนั่นเอง อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่เรากำลังหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้น เราสามารถใช้เงื่อนไขเรื่องความยาวฐานประกอบกับถ้าเราทราบขนาดของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแล้ว เราก็สามารถหาสูตรคำนวณพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

อนึ่ง นักเรขาคณิตนิยามรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วดังนี้

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 1 คู่ และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 1 คู่เช่นกัน

จากนิยามดังกล่าว จะเห็นได้ว่ารูปสามเหลี่ยมใดๆ ก็ตามจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้จะต้องประกอบด้วยเงื่อนไข 2 ประการคือ จะต้องมียาวเท่ากัน 1 คู่ และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากันอีก 1 คู่ ดังนั้น เราสามารถวาดภาพเพื่อแสดงส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังนี้



จากรูป กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้าน BC เป็นด้านฐานซึ่งยาว x หน่วย มีมุม B และมุม C เป็นมุมที่ฐาน โดยที่มุม B = มุม C และด้าน AB ยาวเท่ากับด้าน AC ต่อไปลาก AP ให้ตั้งฉากกับ BC สมมติให้ BP ยาว m หน่วย และให้ด้าน AB ยาว y หน่วย ทั้งนี้ ขอให้สังเกตด้วยว่าเส้นตั้งฉาก AP ไม่จำเป็นต้องแบ่งครึ่งด้าน BC แต่อย่างใด และสังเกตต่อไปด้วยว่าในที่นี้เราไม่ทราบส่วนสูง เพราะถ้าเราทราบส่วนสูงก็ไม่จำเป็นต้องหาสูตรเฉพาะแต่อย่างใด

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABP

จากเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ เราจะได้ว่า $AP = y \sin B$ ----(1)

ต่อไปพิจารณารูปสามเหลี่ยม APC

จะพบว่า PC ยาวเท่ากับ $x - m$ หน่วย

จากเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติจะได้ว่า $AP = (x - m) \tan C$ ----(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $y \sin B = (x - m) \tan C$

เนื่องจาก $B = C$ ดังนั้น $y \sin B = (x - m) \tan B$

จัดรูปสมการใหม่ได้ $x = m + y \cos B$ ----(3)

เพราะฉะนั้น จากสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม คือ $A = \frac{1}{2} \times \text{ส่วนสูง} \times \text{ความยาวฐาน}$

เนื่องจากส่วนสูง = ความยาวด้าน AP = $y \sin B$

และความยาวฐาน = ความยาวด้าน BC = $x = m + y \cos B$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } A &= \frac{1}{2} \times y \sin B \times (m + y \cos B) \\ &= \frac{1}{2} my \sin B + \frac{1}{2} y^2 \sin B \cos B \\ &= \frac{1}{2} my \sin B + \frac{1}{4} y^2 (2 \sin B \cos B) \\ &= \frac{1}{2} my \sin B + \frac{1}{4} y^2 (\sin 2B) \end{aligned} \text{ ----(4)}$$

จาก (4) จะเห็นได้ว่าเรายังมีพจน์ของ m ปรากฏอยู่ซึ่งเราไม่ต้องการ

จากรูปสามเหลี่ยม ABP เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง m, y ตามอัตราส่วนตรีโกณมิติคือ $m = y \cos B$

แทนค่า $m = y \cos B$ ลงใน (4) ก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (y \cos B)(y \sin B) + \frac{1}{4} y^2 (\sin 2B) \\ &= \frac{1}{2} y^2 (\cos B \sin B) + \frac{1}{4} y^2 (\sin 2B) \\ &= \frac{1}{4} y^2 (2 \cos B \sin B) + \frac{1}{4} y^2 (\sin 2B) \\ &= \frac{1}{4} y^2 (\sin 2B) + \frac{1}{4} y^2 (\sin 2B) \\ &= \frac{1}{2} y^2 (\sin 2B) \end{aligned}$$

จากที่เราพิจารณาทั้งหมด เราสามารถสรุปได้ว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วใดๆ ถ้าเราทราบความยาวของด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน และทราบขนาดของมุมที่ฐานแล้วเราสามารถหาค่าพื้นที่โดยใช้สูตร $A = \frac{1}{2} y^2 (\sin 2B)$ ได้ทันที

ในบทความครั้งต่อไป ผู้เขียนจะนำเสนอการหาสูตรคำนวณพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีสูตรคือ
 $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{ความยาวของด้าน}^2$ เพื่อให้ผู้อ่านจะได้เข้าใจที่มาที่ไปและนำสูตรไปปรับใช้กับการทำโจทย์ได้ถูกต้อง

๐ ๐ ๐ ๐ ๐ ๐

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ โดย www.thai-mathpaper.net