

## กฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับ

### วิธีและแบบ

การศึกษาจากกฎเกณฑ์การนับเบื้องต้นนั้น มีสิ่งที่น่าสนใจอยู่ 2 อย่าง คือ

- จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงานชิ้นหนึ่งให้เสร็จลง และ
- จำนวนแบบทั้งหมดของผลงานเมื่องานนั้นถูกทำให้เสร็จลง

ทั้งสองอย่างนี้มีลักษณะคล้ายกันแต่ไม่เหมือนกัน นักเรียนลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.** ชายคนหนึ่ง มีเสื้อ 1 ตัว และกางเกง 1 ตัว จะสามารถแต่งตัวไปทำงานได้กี่วิธี และกี่แบบ

#### วิธีทำ

ปัญหาข้อนี้มีประเด็นพิจารณาอยู่ 2 ประเด็น คือ

- “วิธี” ชายคนนี้สามารถแต่งตัวได้ 2 วิธี คือ
  - ใส่เสื้อก่อนแล้วสวมกางเกง และ
  - สวมกางเกงก่อนแล้วใส่เสื้อ
- “แบบ” เนื่องจาก ไม่ว่าชายคนนี้จะแต่งตัวด้วยวิธีไหนในจำนวน 2 วิธีนี้ ผลที่ออกมาก็เหมือนกัน นั่นคือ เขาสามารถแต่งตัวได้ 1 แบบ ■

นักเรียนควรจำไว้ว่า “วิธี” และ “แบบ” นั้นต่างกัน

### การนับแบบของผลงานด้วยวิธีทำงาน

ถ้าในหมู่วิธีทำงานทั้งหมด  $N$  วิธี หากทุก  $n$  วิธี ที่ให้ผลงานเหมือนกัน จำนวนแบบทั้งหมด  $= \frac{N}{n}$  แบบ

**ตัวอย่าง 2.** ในการทำงานชิ้นหนึ่งแบ่งการทำงานที่เป็นอิสระต่อกัน 40 วิธี ถ้างานทุกๆ 10 วิธี ให้ผลงานออกมาเหมือนกัน อยากทราบว่างานทั้งหมดมีกี่แบบ

#### วิธีทำ

จากกฎการนับ จำนวนจำนวนแบบของชิ้นงาน คือ  $\frac{\text{จำนวนงานที่เป็นอิสระต่อกันทั้งหมด}}{\text{จำนวนผลงานที่เหมือนกัน}} = \frac{40}{10} = 4$  แบบ ■

**ตัวอย่าง 3.** กล่องใบหนึ่งบรรจุเสื้อยี่ห้อต่างๆจำนวน 100 ตัว ถ้าทุกๆ 5 ตัว เป็นเสื้อยี่ห้อเดียวกัน อยากทราบว่าจะมีเสื้อกี่ยี่ห้อ

#### วิธีทำ

จากกฎการนับ จำนวนยี่หื้อทั้งหมดของเสื้อ คือ  $\frac{\text{จำนวนเสื้อทั้งหมด}}{\text{จำนวนเสื้อที่เหมือนกัน}} = \frac{100}{5} = 20$  ยี่หื้อ ■

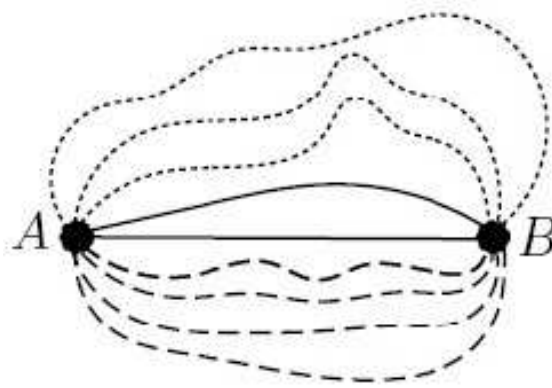
### กฎการบวก (The Addition Principle)

ถ้าการดำเนินการอย่างหนึ่ง มีทางเลือกในการดำเนินงานแบ่งออกได้เป็น  $k$  กรณี โดยในแต่ละกรณีสามารถกระทำได้  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  วิธี การดำเนินการนั้น

จะมีวิธีกระทำที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด  $= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$  วิธี

**ตัวอย่าง 4.** ในการเดินทางจากเมือง  $A$  ไปยังเมือง  $B$  สามารถเดินทางได้ทั้ง ทางบก ทางทะเล และทางอากาศ โดยทางบกมี 2 เส้นทาง ทางทะเลมี 4 เส้นทาง และทางอากาศมี 3 เส้นทาง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเดินทางจากเมือง  $A$  ไปยังเมือง  $B$  ได้

วิธีทำ



รูปที่ 1: เส้นทางทั้งหมดจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $B$

จำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถ เดินทางจากเมือง  $A$  ไปยังเมือง  $B$  ได้ คือ จำนวนเส้นทางทั้งหมดจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $B$  นั่นคือ จำนวนวิธีทางบก + จำนวนวิธีทางทะเล + จำนวนวิธีทางอากาศ  $= 2 + 4 + 3 = 9$  วิธี ■

ให้  $k \geq 1$  ถ้ามี  $A_1, A_2, \dots, A_k$  เป็นเซตจำกัดที่  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \leq k, i \neq j$  แล้ว  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$  เมื่อ  $|A_l|$  คือ จำนวนสมาชิกของ  $A_l, 1 \leq l \leq k$

**ตัวอย่าง 5.** จงหาคู่อันดับ  $(x, y)$  ซึ่ง  $x, y \in \mathbb{Z}$  และ  $x^2 + y^2 \leq 7$

วิธีทำ

เราสามารถแบ่งปัญหานี้เป็น 8 กรณี ที่ไม่มีส่วนร่วมกันได้ (disjoint) คือ กรณีที่  $x^2 + y^2 = 0, 1, \dots, 7$  นั่นคือ สำหรับแต่ละ  $i = 1, 2, \dots, 7$  ให้

$$S_i = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = i\}$$

นั่นคือ

$$S_0 = \{(0, 0)\}$$

$$S_1 = \{(0, -1), (0, 1), (-1, 0), (1, 0)\}$$

$$S_2 = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$$

$$S_3 = \emptyset$$

$$S_4 = \{(-2, 0), (2, 0), (0, -2), (0, 2)\}$$

$$S_5 = \{(-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2), (-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)\}$$

$$S_6 = \emptyset$$

$$S_7 = \emptyset$$

ดังนั้นตามหลักการบวก จึงได้  $(x, y)$  ที่สอดคล้องตามเงื่อนไข  $x^2 + y^2 \leq 7$  ทั้งหมดเท่ากับ

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_7| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_7| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 + 0 + 0 = 21 \quad \blacksquare$$

## กฎการคูณการทำงานหรือแบบของผลงาน

ถ้าเดิมวิธีการทำงาน (หรือแบบของผลงาน) มีทั้งหมด  $N$  วิธี โดยแต่ละงานย่อย  $T_1, T_2, \dots, T_k$  สามารถทำงานได้เพียง 1 วิธี จากที่เคยทำงานได้  $n_1, n_2, \dots, n_k$  วิธี จะได้ว่าจำนวนวิธีทำงาน (หรือแบบของผลงาน) จะเหลือเพียง

$$\frac{N}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k} = \frac{N}{\prod_{i=1}^k n_i} \text{ วิธี}$$

**ตัวอย่าง 6.** ในการทำงานชิ้นหนึ่งแบ่งการทำงานที่เป็นอิสระต่อกัน 160 วิธี ถ้างานทุกๆ 20 วิธี ให้ผลงานออกมาเหมือนกัน อยากทราบว่างานทั้งหมดมีกี่แบบ

### วิธีทำ

$$\text{จากกฎการคูณงาน จำนวนแบบของงาน} = \frac{\text{จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมด}}{\text{จำนวนวิธีการทำงานที่เหมือนกัน}} = \frac{160}{20} = 8 \text{ แบบ} \quad \blacksquare$$

## แบบฝึกหัด 1

1. ชายคนหนึ่งมีเสื้อ 1 ตัว กางเกง 1 ตัว อยากทราบว่าเขาจะสามารถแต่งตัวได้กี่วิธี และกี่แบบ
2. ในการทำงานชิ้นหนึ่งแบ่งการทำงานที่เป็นอิสระต่อกัน 60 วิธี ถ้างานทุกๆ 5 วิธี ให้ผลงานออกมาเหมือนกัน อยากทราบว่างานทั้งหมดมีกี่แบบ
3. กล่องใบหนึ่งบรรจุดินสอยี่ห้อต่างๆจำนวน 150 แห่ง ถ้าทุกๆ 3 แห่ง เป็นดินสอยี่ห้อเดียวกัน อยากทราบว่า จะมีดินสอยี่ห้อ
4. แม่ค้าคนหนึ่งต้องการซื้อของจากตลาดมาขาย โดยมีตลาดที่ตำบล A จำนวน 2 แห่ง ตำบล B จำนวน 5 แห่ง และตำบล C จำนวน 4 แห่ง อยากทราบว่า แม่ค้าจะสามารถซื้อของได้กี่วิธี
5. ในการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง B สามารถเดินทางได้ทั้ง ทางบก ทางทะเล และทางอากาศ โดยทางบกมี 2 เส้นทาง ทางทะเลมี 4 เส้นทาง และทางอากาศมี 3 เส้นทาง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ได้
6. กล่องใบหนึ่งมีสมุดแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์ 10 ยี่ห้อ ภาษาไทย 12 ยี่ห้อ และสังคมศึกษา 2 ยี่ห้อ บรรจุอยู่ภายใน จะมีวิธีหยิบสมุดทั้งหมดที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี ถ้ากล่องใบนี้บรรจุสมุดยี่ห้อละเล่ม

## กฎการคูณ (The Multiplication Principle)

ถ้าการดำเนินการอย่างหนึ่ง สามารถแบ่งขั้นตอนของการปฏิบัติออกได้เป็น  $k$  ขั้นตอน โดยในขั้นตอนที่ 1 เราสามารถเลือกกระทำได้อัน  $n_1$  วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำนั้น เราสามารถเลือกทำต่อในขั้นตอนที่ 2 ได้  $n_2$  วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำขั้นตอนที่ 1 และ 2 นั้น จะเลือกทำขั้นตอนที่ 3 ได้  $n_3$  วิธี เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึงขั้นตอนที่  $k$  ซึ่งเราสามารถเลือกกระทำได้อัน  $n_k$  วิธี การดำเนินการนั้น

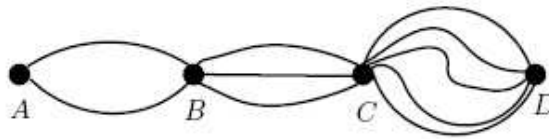
จะมีวิธีกระทำที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด  $= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$  วิธี

**ตัวอย่าง 7.** ในการเดินทางจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $D$  จะต้องผ่านเมือง  $B$  และเมือง  $C$  ตามลำดับ ถ้าทราบว่า มี 2 เส้นทางจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $B$  มี 3 เส้นทางจากเมือง  $B$  ไปเมือง  $C$  และมี 5 เส้นทางจากเมือง  $C$  ไปเมือง  $D$  จงหาวิธีเดินทางทั้งหมดจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $D$

### วิธีทำ

วิธีเดินทางทั้งหมดจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $D$  คือ

$(\text{เส้นทางจากเมือง } A \text{ ไปเมือง } B) \cdot (\text{เส้นทางจากเมือง } B \text{ ไปเมือง } C) \cdot (\text{เส้นทางจากเมือง } C \text{ ไปเมือง } D)$



รูปที่ 2: วิธีเดินทางทั้งหมดจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $D$

ซึ่งจะได้วิธีเดินทางทั้งหมดจากเมือง  $A$  ไปเมือง  $D = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  วิธี ■

**ตัวอย่าง 8.** ครูแจ่มมีเสื้อ 3 ตัว มีกางเกง 4 ตัว อยากทราบว่า ครูแจ่มจะแต่งตัวไปเที่ยวได้กี่แบบ

### วิธีทำ

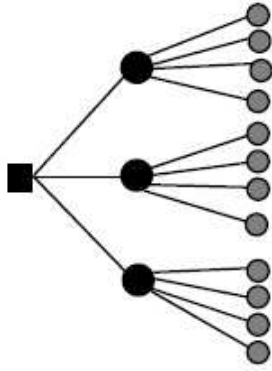
จากกฎการคูณ ครูแจ่มจะแต่งตัวไปเที่ยวได้ทั้งหมด  $= 3 \cdot 4 = 12$  แบบ ■

**ตัวอย่าง 9.** จำนวนคี่บวก (positive odd numbers) ซึ่งมี 3 หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน

### วิธีทำ

- จาก  $\{0, 2, \dots, 9\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  เราสามารถเลือกเลขหลักร้อยได้ 9 ตัว คือ  $1, 2, \dots, 9$  ยกเว้น 0
- จาก  $\{0, 2, \dots, 9\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  เราสามารถเลือกเลขหลักสิบได้ 10 ตัว คือ  $0, 1, \dots, 9$
- จาก  $\{0, 2, \dots, 9\} \subseteq \mathbb{Z}^+$  เราสามารถเลือกเลขหลักหน่วยที่เป็นจำนวนเต็มคี่ได้ 5 ตัว คือ  $1, 3, 5, 7, 9$

$\therefore$  จากหลักการคูณ จำนวนคี่บวกที่มีสามหลักจะมีทั้งหมด  $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$  จำนวน ■



รูปที่ 3: จำนวนการแต่งตั้งตัวไปเที่ยวได้ทั้งหมดของครูแจ้ง

**ตัวอย่าง 10.** จำนวนนับสามหลักที่มีเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีทั้งหมดกี่จำนวน

**วิธีทำ**

โจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องระมัดระวังเรื่องการพิจารณาแก้โจทย์ปัญหาให้ดีๆ วิธีทำมีดังนี้ (ให้นักเรียนสังเกตปัญหาที่เกิดขึ้นจากการพิจารณาแก้โจทย์ไปด้วยจากวิธีทำต่อไปนี้)

- พิจารณาเลือกหลักร้อย เราสามารถเลือกได้จาก  $1, 2, \dots, 9$  มา 9 ตัว ได้ 9 วิธี (ยกเว้น 0)
- พิจารณาเลือกหลักสิบ เราสามารถเลือกได้จาก  $1, 2, \dots, 9$  มา 8 ตัว + 0 ได้  $8 + 1 = 9$  วิธี  
(= (จำนวนวิธีหลักร้อย  $- 1$  ตัว) + (เลข 0 จำนวน 1 ตัว) =  $(9 - 1) + 1 = 9$  วิธี)
- พิจารณาเลือกหลักหน่วย เราสามารถเลือกได้จาก  $0, 1, \dots, 9$  มา 8 ตัว  
(= จำนวนวิธีหลักสิบ  $- 1$  ตัว =  $9 - 1 = 8$  วิธี)

∴ จากหลักการคูณ จำนวนนับสามหลักที่มีเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันจะมีทั้งหมด  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  จำนวน ■

**หลักการเลือก คือ 1. เลือกหลักร้อย 2. เลือกหลักสิบ 3. เลือกหลักหน่วย**

สำหรับโจทย์ตัวอย่างข้อนี้ ถ้าเราเลือกหลักหน่วยก่อน แล้วจึงเลือกหลักสิบและหลักร้อยตามลำดับ เมื่อพิจารณาตามกฎการคูณแล้ว จะไม่สามารถใช้กฎการคูณได้ เพราะงานแต่ละขั้นไม่เป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ

- เราสามารถเลือกหลักหน่วยได้ 10 วิธี คือ เลือกจาก  $0, 1, \dots, 9$
- เราสามารถเลือกหลักสิบได้ 9 วิธี ที่เหลือจากการเลือกในหลักหน่วย
- เราไม่สามารถเลือกหลักร้อยได้ เพราะว่า
  - ถ้าเราเลือก 0 ในหลักหน่วยหรือหลักสิบ เราจะสามารถเลือกหลักร้อยได้ 8 วิธี
  - ถ้าเราไม่เลือก 0 ในหลักหน่วยหรือหลักสิบ เราจะสามารถเลือกหลักร้อยได้ 7 วิธี (เพราะ 0 ไม่สามารถเลือกใช้เป็นหลักร้อยได้)

จากปัญหาการเลือกหลักร้อย ทำให้ไม่สามารถใช้หลักการคูณได้เพราะ “งานไม่สม่ำเสมอ” ดังนั้นในการพิจารณาแก้โจทย์ปัญหาเช่นนี้ นักเรียนควรสังเกตให้ดีก่อนการทำโจทย์

**ตัวอย่าง 11.** จำนวนคู่บวกสามหลักที่มีเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีกี่จำนวน

วิธีทำ

โจทย์ข้อนี้มีความซับซ้อนกว่าตัวอย่างที่ 10 เราจึงเลือกหลักหน่วยก่อน แล้วเลือกหลักร้อยและหลักสิบตามลำดับ

- เนื่องจากโจทย์ต้องการจำนวนคู่บวก เราจึงสามารถเลือกหลักหน่วยได้จาก 0, 2, 4, 6, 8 ได้ 5 วิธี
- พิจารณาเลือกหลักร้อย เราสามารถเลือกได้จาก 1, 2, ..., 9 มา 8 ตัว (เพราะไม่รวม 0 ในหลักร้อย)
- พิจารณาเลือกหลักสิบ เราสามารถเลือกได้จาก 0, 1, ..., 9 มา 8 ตัว (เพราะรวม 0 ด้วย)  
(= (จำนวนวิธีหลักร้อย - 1 ตัว) + (เลข 0 จำนวน 1 ตัว) = (8 - 1) + 1 = 8 วิธี)

∴ จากหลักการคูณ จำนวนนับคู่สามหลักที่มีเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันจะมีทั้งหมด  $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$  จำนวน ■

**หลักการเลือก** คือ 1. เลือกหลักที่ fixed 2. เลือกหลักที่มากที่สุด ... เลือกหลักหน่วย

ให้  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) | a_i \in A_k, 1 \leq i \leq k\}$  เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัด  $A_1, A_2, \dots, A_k$  แล้ว

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

**บทนิยาม 12.** ให้  $n, k \in \mathbb{N}$  เราจะเรียกจำนวนที่เขียนอยู่ในรูป  $a_1 a_2 \dots a_n$  โดยที่  $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$   $\forall i = 1, 2, \dots, n$  ว่า **เลขฐาน  $k$  ที่มี  $n$  หลัก** และนิยมเขียน  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  แทน เลขฐาน  $k$  ที่มี  $n$  หลัก จากบทนิยามที่ 12 จำนวนหลัก คือ จำนวนเลขโดด  $a_1 a_2 \dots a_n$  ที่เรียงกันนั่นเอง

**ตัวอย่าง 13.** เลขฐานสองที่มี 3 หลัก มีจำนวนทั้งสิ้น  $2^3 = 8$  ตัว คือ  $\{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$

**ตัวอย่าง 14.** เลขฐาน  $k$  ที่มี  $n$  หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ

เลือก  $a_1$  จาก  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  ได้  $k$  วิธี

เลือก  $a_2$  จาก  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  ได้  $k$  วิธี

เลือก  $a_3$  จาก  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  ได้  $k$  วิธี

⋮ ⋮

เลือก  $a_n$  จาก  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  ได้  $k$  วิธี

ดังนั้น เลขฐาน  $k$  ที่มี  $n$  หลัก มีทั้งหมดคือ

$$\underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_n = k^n \text{ จำนวน } \blacksquare$$

**เลขฐาน  $k$  ที่มี  $n$  หลัก มีทั้งหมด  $k^n$  จำนวน**

**ตัวอย่าง 15.** จงหาจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ 400

วิธีทำ

$$\text{จาก } 400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^2$$

จำนวนเต็มบวก  $m$  จะเป็นตัวหารของ 400 ก็ต่อเมื่อ  $m = 2^a \cdot 5^b$  โดยที่  $a, b \in \mathbb{Z}^+$

และ  $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 2$  ดังนั้นเราสามารถสร้างตัวเลข  $(a, b)$  ได้คือ

$a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  และ  $b \in \{0, 1, 2\}$  นั่นคือ  $|\{a\}| = 5, |\{b\}| = 3$

จากหลักการคูณจะได้ว่า จำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ 400 คือ  $5 \cdot 3 = 15$  ตัว ■

**ข้อสังเกต 16.** จากตัวอย่างที่ 15. เราจะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนนับ  $n = \alpha^a \cdot \beta^b \cdot \dots \cdot \omega^z \quad \forall a, b, \dots, z \in \mathbb{Z}^+$  จะได้ว่า จำนวนตัวหารบวกของ  $n = (\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot \dots \cdot (\omega + 1)$  ตัว

$\forall n \in \mathbb{N} = \alpha^a \cdot \beta^b \cdot \dots \cdot \omega^z$  จำนวนตัวหารบวกของ  $n = (\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot \dots \cdot (\omega + 1)$  ตัว  $\forall a, b, \dots, z \in \mathbb{Z}^+$

**ข้อสังเกต 17.** สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $m$  จะได้ว่า  $m^0 = 1 \in \mathbb{Z}^+$  เสมอ ด้วยเหตุนี้เราจึงรวม 0 ใน  $\{a\}$  และ  $\{b\}$  ในตัวอย่างที่ 15. ด้วย

## แบบฝึกหัด 2

1. ชายคนหนึ่งมีเสื้อ 3 ตัว ที่แตกต่างกัน และกางเกง 4 ตัว ที่แตกต่างกัน อยากทราบว่าชายผู้นี้จะสามารถแต่งกายโดยไม่ซ้ำกันได้กี่แบบ
2. จำนวนเต็มคู่บวก (positive even numbers) ซึ่งมีสามหลักมีทั้งหมดกี่จำนวน
3. จำนวนเต็มลบ (negative integers) สามหลักโดยเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีกี่จำนวน
4. จำนวนคี่ลบ (negative odd numbers) สามหลักที่มีเลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีกี่จำนวน
5. จงหาตัวหารบวกทั้งหมดของ 456

## แบบฝึกหัด 3

1. ตั๊กแตน 3 ตัว สามารถบินเกาะกิ่งไม้ที่แตกต่างกัน 4 กิ่ง ได้กี่วิธี
2. ต้องการส่งบัตรอวยพรจำนวน 5 ใบ ลงตู้ไปรษณีย์จำนวน 2 ตู้ จะสามารถทำได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า
  - (a) แต่ละใบลงตู้ใดก็ได้
  - (b) ห้ามส่งลงตู้ซ้ำกัน
3. แบบทดสอบปรนัยชุดหนึ่งมี 10 ข้อ แต่ละข้อมี 3 ตัวเลือก จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนทำผิดหมดทุกข้อ
4. สมชาย สมหญิง และ สมใจ ต้องการขึ้นบรรไดเลื่อนจำนวน 4 แห่ง จำนวนวิธีที่สมชายกับสมหญิงขึ้นพร้อมกัน แต่สมใจขึ้นคนเดียวโดยไม่ซ้ำกันมีกี่วิธี
5. ในการเดินทางจากไทยไปสิงคโปร์มีสองทางเลือกหลัก คือ นั่งรถทัวร์ไปต่อเรือ กับ นั่งเครื่องบิน (อย่างเดียว) ถ้าเครื่องบินมี 4 เที่ยวบิน ที่แตกต่างกันต่อวัน รถทัวร์มี 5 คัน ที่แตกต่างกัน และเรือมี 3 ลำ ที่แตกต่างกันถ้าจะเดินทางจากไทยไปสิงคโปร์จะสามารถเดินทางได้กี่วิธี
6. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเดินเข้าออกห้องสามห้อง ถ้าห้องแรกมี 2 ประตู ห้องที่สองมี 3 ประตู และห้องสุดท้ายมี 4 ประตู
7. เจ้งสามารถเดินทางจากบ้านไปโรงเรียนโดยรถยนต์ได้สามประเภท คือ รถสองแถวจำนวน 3 คัน ที่แตกต่างกัน รถตู้จำนวน 2 คัน ที่แตกต่างกันและรถเมล์จำนวน 2 คัน ที่แตกต่างกัน อยากทราบว่า จำนวนวิธีทั้งหมดที่เจ้งเดินทางไป - กลับ โดยรถยนต์ประเภทเดียวกันแต่ไม่กลับคันเดิม เป็นเท่าไร
8. ครูเจ้งต้องการเชิญเด็ก 5 คน ไปดูหนัง จะสามารถทำได้กี่วิธี ถ้ามีเงื่อนไขว่าต้องมีอย่างน้อย 1 คน ที่ไปด้วย

9. ต้องการเขียนเครื่องหมาย  $\checkmark$  หรือ  $\times$  ลงในตารางขนาด  $3 \times 3$  โดยให้มีเครื่องหมายเต็มทุกช่อง และจะต้องมีเครื่องหมายอย่างน้อยอย่างละ 1 เครื่องหมาย จำนวนวิธีเขียนทั้งหมดเท่ากับเท่าไร

### ตัวอย่างโจทย์ข้อสอบเข้าเรียนต่อ

- (คณิตศาสตร์ กข 26) รถยนต์คันหนึ่งมีที่นั่งข้างหน้า 2 ที่ และข้างหลัง 1 ที่ ถ้ามีคนทั้งหมด 6 คน ซึ่ง 2 คน ขับรถได้ จะจัดคนให้เข้านั่งรถได้กี่วิธี
  - 120 วิธี
  - 40 วิธี
  - 20 วิธี
  - 6 วิธี
- (คณิตศาสตร์ กข 34) นาย ก, ข และ ค จะขึ้นลิฟท์ซึ่งมีทั้งหมด 3 ตัว จำนวนวิธีที่นาย ก และ ข ขึ้นด้วยกัน แต่นาย ค ขึ้นคนเดียว มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
  - 6
  - 7
  - 8
  - 9
- (คณิตศาสตร์ กข 37) การเขียนเครื่องหมาย O หรือ X ลงในตารางขนาด  $2 \times 3$  โดยให้มีเครื่องหมายเต็มทุกช่อง และต้องมีเครื่องหมายอย่างน้อยอย่างละ 1 เครื่องหมายแล้ว จำนวนวิธีเขียนเท่ากับเท่าไร
- (คณิตศาสตร์ กข 24) กำหนดให้ใช้ตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 สร้างจำนวนที่มี 3 หลัก โดยแต่ละหลักมีตัวเลขไม่ซ้ำกัน จงหาว่า คำตอบของข้อใดถูกต้อง
  - จำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด 120 จำนวน
  - จำนวนที่มีทั้งหมด 48 จำนวน
  - จำนวนที่มีค่ามากกว่า 350 มีทั้งหมด 40 จำนวน
  - จำนวนที่ 10 ทหารลงตัว มีทั้งหมด 30 จำนวน
- (คณิตศาสตร์ กข 39) จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วย หรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ มีจำนวนเท่ากับข้อใด
  - 350
  - 380
  - 470
  - 500
- (คณิตศาสตร์ กข 29) ให้เซต  $X = \{n \mid 100 \leq n \leq 999 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$   
 $A_i = \{n \in X \mid \text{หลักที่ } i \text{ นับจากทางซ้ายของ } n \text{ เท่ากับ } i\}$   
และให้  $|A|$  หมายถึงจำนวนสมาชิกของเซต  $A$  ดังนั้น  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$  เท่ากับ



- (a) 252
- (b) 259
- (c) 260
- (d) ข้อ ก - ค ไม่มีข้อใดถูก

## การเลือก หรือ การจัดหมู่(Combination)

ถ้ามีของแตกต่างกันทั้งหมด  $n$  สิ่ง ต้องการเลือกมาคราวละ  $k$  สิ่ง

$$\text{จะมีวิธีเลือกได้ทั้งหมด} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k} = C_{n,r} \text{ วิธี}$$

7. (คณิตศาสตร์ กข 40) ในการแข่งขันฟุตบอล คณะกรรมการจัดการแข่งขันจัดให้มีการแข่งขันแบบพบกันหมด ปรากฏว่าต้องจัดให้มีการแข่งขันทั้งหมด 36 คู่ การแข่งขันนี้มีทีมเข้าร่วมแข่งขันจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
  - (a) 6
  - (b) 8
  - (c) 9
  - (d) 12
8. (คณิตศาสตร์ กข 26) มีจุด 12 จุด ก, ข, ค, ง, ... อยู่บนระนาบ และไม่มีสามจุดใดๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะมีวิธีลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้ง 12 จุด เพื่อให้ได้รูปสามเหลี่ยมซึ่งมี ก เป็นจุดยอดได้กี่วิธี
  - (a) 1320 วิธี
  - (b) 660 วิธี
  - (c) 110 วิธี
  - (d) 55 วิธี
9. (คณิตศาสตร์ กข 23) บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งมีจุด 7 จุด เราจะสร้างรูปเหลี่ยมบรรจุนในวงกลมโดยอาศัยจุดเหล่านั้นได้กี่รูป
  - (a) 18 รูป
  - (b) 29 รูป
  - (c) 30 รูป
  - (d) 64 รูป
  - (e) 99 รูป
10. (คณิตศาสตร์ กข 37) โรงงานแกะสลักไม้แห่งหนึ่งมีพนักงาน 15 คน เป็นหญิง 6 คน เป็นชาย 9 คน ผู้จัดการรับงานมา 3 ชนิด โดยงานชนิดที่หนึ่งใช้คนงานหญิง 3 คน งานชนิดที่สองใช้คนงานชาย 5 คน ส่วนงานชนิดที่สามใช้คนงานชาย หรือหญิง ก็ได้จำนวน 3 คน จำนวนวิธีที่ผู้จัดการจะเลือกคนงานให้แกะสลักไม้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- (a) 37,800  
 (b) 68,250  
 (c) 75,600  
 (d) 88,200
11. (คณิตศาสตร์ กข 26) ในการสอบไล่ครั้งหนึ่งอาจารย์ออกข้อสอบทั้งหมด 13 ข้อ ให้นักเรียนทำให้ครบ 10 ข้อ และใน 5 ข้อแรก มีบังคับเลือก 3 ข้อ นักเรียนจะเลือกทำข้อสอบได้ทั้งหมดกี่วิธี
- (a) 30 วิธี  
 (b) 80 วิธี  
 (c) 175 วิธี  
 (d) 286 วิธี
12. (คณิตศาสตร์ กข 36) จากอาจารย์ 4 คน นักเรียนชาย 5 คน นักเรียนหญิง 2 คน ต้องการเลือกตัวแทน 4 คน โดยให้มีอาจารย์ 1 คน และนักเรียนหญิงอย่างน้อย 1 คน จำนวนวิธีเลือกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- (a) 20  
 (b) 80  
 (c) 100  
 (d) 240
13. (คณิตศาสตร์ กข 35) ต้องการเลือกสมาชิก 4 คน จากสมาชิกทั้งหมด 12 คน เพื่อเป็นตัวแทนเข้าร่วมประชุม โดยที่ สมาชิกทั้ง 12 คนนี้ มีสามีภรรยาคู่หนึ่ง ซึ่งถ้าคนใด คนหนึ่งได้เป็นตัวแทน อีกคนหนึ่งต้องได้เป็นด้วย ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกตัวแทนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- (a) 45  
 (b) 66  
 (c) 210  
 (d) 255
14. (คณิตศาสตร์ กข 34) ตู้ใบหนึ่งมีเสื้อสีแดงแบบต่างๆ กัน 6 ตัว และเสื้อสีขาวแบบต่างๆ กัน 4 ตัว ถ้าสุ่มหยิบเสื้อจากตู้ใบนี้มา 5 ตัว ให้มีสีคละกันแล้ว จำนวนวิธีที่จะหยิบได้เสื้อสีแดงมากกว่าเสื้อสีขาว คือข้อใดต่อไปนี้
- (a) 60 วิธี  
 (b) 120 วิธี  
 (c) 180 วิธี  
 (d) 240 วิธี
15. (คณิตศาสตร์ กข 36) ข้อสอบปรนัยวิชาหนึ่งมี 6 ข้อ ข้อที่ 1 และข้อที่ 2 มีคะแนนเต็มข้อละ 3 คะแนน ข้ออื่นๆ มีคะแนนเต็มข้อละ 1 คะแนน หากนักเรียนตอบข้อใดถูกต้องจะได้คะแนนเต็มของข้อนั้น หากตอบผิดจะได้ 0 คะแนน จำนวนวิธีที่นักเรียนจะทำคะแนนวิชานี้ได้ 60 เปอร์เซนต์พอดี เท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

- (a) 6
- (b) 7
- (c) 8
- (d) 9

## การจัดลำดับ หรือการเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

ถ้ามีของ  $n$  สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ต้องการนำมาจัดลำดับ (ในแนวเชิงเส้น) คราวละ  $k$  สิ่ง ( $k \leq n$ )

$$\text{จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมด} = P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ วิธี}$$

ถ้ามีของ  $n$  สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จำนวนวิธีจัดลำดับ (ในแนวเชิงเส้น) ของทั้ง  $n$  สิ่งนี้ คราวละทั้งหมด

$$\text{จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมด} = P_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \text{ วิธี}$$

### วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมมีข้อตกลงเบื้องต้นคือ ถ้าสิ่งที่เรานำมาจัดเรียง เปลี่ยนตำแหน่งไปพร้อมกันด้วยการหมุน เราถือว่าเป็นการจัดลำดับที่ไม่แตกต่างกัน

การจัดเรียงเชิงวงกลม; จัดเรียงเปลี่ยนตำแหน่งไปพร้อมกันด้วยการหมุนเป็นการจัดลำดับที่ไม่แตกต่างกัน

**หลักการคำนวณ;** ให้เอาตัวใดตัวหนึ่งมา fix เป็นหลักเอาไว้ โดยตัวที่นำมา fix นี้ ไม่ต้องคำนวณ จากนั้นค่อยจัดลำดับส่วนที่เหลือล้อมรอบในลักษณะเชิงเส้นตรง

$$\text{จำนวนวิธีการจัดเรียงเปลี่ยนตำแหน่งของไปพร้อมกันด้วยการหมุนเชิงวงกลม } n \text{ สิ่ง} = (n-1)!$$

16. (คณิตศาสตร์ กข 30) บ่อปลาแห่งหนึ่งเป็นวงกลม อนุญาตให้เข้าตกปลาได้ที่ละ 4 คน โดยให้นั่งอยู่รอบบ่อ ถ้าครอบครัวหนึ่ง มากัน 6 คน จะจัดคนในครอบครัวนี้ นั่งรอบบ่อตกปลาได้ทั้งหมดกี่วิธี
- (a) 15 วิธี
  - (b) 24 วิธี
  - (c) 45 วิธี
  - (d) 90 วิธี

### วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่มีเงื่อนไขติดกัน

กลุ่มที่ต้องการอยู่ติดกันให้จับมัดรวมกัน ถือเสมือนว่ามีเพียงหนึ่งเดียว แล้วนำไปรวมกับพวกที่เหลือเพื่อจัดเรียงก่อน จากนั้นค่อยมาสลับที่กันเองภายในกลุ่มทีหลัง

$$P_{n,k} \text{ ที่มีเงื่อนไขติดกัน; ของที่ติดกันในการจัดเรียงถือว่าเป็นชิ้นเดียวกัน}$$

17. (คณิตศาสตร์ กข 21) นักเรียนคนหนึ่งมีตำราวิทยาศาสตร์ 4 เล่มต่างกัน คณิตศาสตร์ 3 เล่ม ต่างกัน ภาษาอังกฤษ 2 เล่ม ต่างกัน และ ภาษาไทย 1 เล่ม เขาจะมีวิธีเรียงตำราบนชั้นได้ต่างกันกี่วิธี ถ้าเขาต้องการให้ตำราเรียนในหมวดวิชาเดียวกันอยู่ติดกันด้วย
- (a) 288 วิธี  
 (b) 12,600 วิธี  
 (c) 6,912 วิธี  
 (d) 24 วิธี  
 (e) 1,728 วิธี
18. (คณิตศาสตร์ กข 38) ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง ตัวแทนนักเรียนจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ชั้นปีละ 3 คน จะต้องทำการประชุม เพื่อเตรียมการแสดงสำหรับงานคืนสู่เหย้าของโรงเรียน จำนวนวิธีที่จะจัดผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมดนั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่ตัวแทนที่มาจากชั้นปีเดียวกันต้องนั่งติดกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- (a) 16 วิธี  
 (b) 54 วิธี  
 (c) 432 วิธี  
 (d) 1,296 วิธี
19. (คณิตศาสตร์ กข 39) มีลูกแก้ว 7 ลูก ซึ่งมีสีต่างกันหมดโดยมีสีแดง สีขาว สีน้ำเงิน และสีอื่นๆ จำนวนวิธีที่จะวางเรียงลูกแก้ว เป็นวงกลมโดยให้สีน้ำเงินเรียงอยู่ติดกับสีขาว และติดกับสีแดงเท่ากับข้อใด
- (a) 24 วิธี  
 (b) 48 วิธี  
 (c) 120 วิธี  
 (d) 240 วิธี
20. (คณิตศาสตร์ กข 31) จำนวนวิธีเลือกตัวอักษร 4 ตัว จากตัวอักษรของคำว่า BEERBARREL เท่ากับเท่าใด
21. (คณิตศาสตร์ กข 40) ครู 3 คน พานักเรียน 6 คนไปเข้าค่ายวิชาการ ซึ่งต้องพักในบ้านหลังหนึ่งที่มีห้องนอน 3 ห้อง ห้องเล็กอยู่ได้ 2 คน ห้องกลางอยู่ได้ 3 คน และห้องใหญ่อยู่ได้ 4 คน ถ้าต้องการให้ครู 3 คน พักในห้องเดียวกัน จะมีวิธีการแบ่งคนเข้าพักได้ทั้งหมดกี่วิธี
22. (คณิตศาสตร์ กข 36) อาคารหลังหนึ่งมีลิฟท์ 2 เครื่อง ความน่าจะเป็นที่ลิฟท์เครื่องแรก และเครื่องที่สองรออยู่ชั้นล่างเป็น 0.20 และ 0.30 ตามลำดับ และความน่าจะเป็นที่จะมีลิฟท์ทั้งสองเครื่องรออยู่พร้อมกันที่ชั้นล่างเป็น 0.06 ความน่าจะเป็นที่จะมีลิฟท์รออยู่ชั้นล่างเพียงเครื่องเดียวเท่ากับเท่าใด
23. (คณิตศาสตร์ กข 40) ถ้าเซต  $A$  มีสมาชิก 8 จำนวน เซต  $B$  มีสมาชิก 6 จำนวน และ  $A$  กับ  $B$  มีสมาชิกร่วมกัน 3 จำนวน แล้ว พังก์ชัน  $1 - 1$  จากเซต  $B \cap A'$  ไปยังเซต  $A \cap B'$  มีจำนวนเท่ากับเท่าใด
24. (คณิตศาสตร์ กข 35) กำหนดให้  $A = \{1, 2\}$  และ  $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$   
 ถ้า  $N = \{f | f : A \xrightarrow{1:1} B \text{ และ มี } x \in A \text{ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ } f(x) = x\}$  แล้ว  $N$  มีสมาชิกกี่ตัว

ครูเจ๋ง – อานิ่ง ชูไวย  
jeng\_r1@hotmail.com  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยนเรศวร