
หน่วยที่ 1 เลขยกกำลัง

Unit 1 Exponents

บทนิยาม ทฤษฎี ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด

สำหรับนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
รายวิชา ค 42101 (คณิตศาสตร์พื้นฐาน 3)
ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

ชื่อ - นามสกุล เลขที่..... ชั้น

โรงเรียนเทิงวิทยาคม อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

เวลาเรียน วัน.....ชั่วโมงที่.....เรียนที่ห้อง.....

วัน.....ชั่วโมงที่.....เรียนที่ห้อง.....

ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552

ครูผู้สอน : ครูอาหนึ่ง ชูไวย

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

แบบบันทึกการส่งงาน

ครั้งที่	วัน/เดือน/ปี	รายการ	ลายมือชื่อครู	หมายเหตุ
1		ข้อมูลส่วนตัวผู้เรียน		
2		แบบฝึกหัดที่ 1.1		
3		แบบฝึกหัดที่ 1.2		
4		แบบฝึกหัดที่ 1.3		
5		แบบฝึกหัดที่ 1.4		
6		แบบฝึกหัดที่ 1.5		
7		แบบฝึกหัดที่ 1.6		
10		แบบฝึกหัดที่ 1.7-1		
11		แบบฝึกหัดที่ 1.7-2		
8		แบบฝึกหัดที่ 1.8		
9		แบบฝึกหัดที่ 1.9		
10		แบบฝึกหัดที่ 1.10-1		
11		แบบฝึกหัดที่ 1.10-2		
12		แบบฝึกหัดที่ 1.11-1		
13		แบบฝึกหัดที่ 1.11-2		
14		แบบฝึกหัดที่ 1.12-1		
14		แบบฝึกหัดที่ 1.12-2		
13		แบบฝึกหัดที่ 1.12-3		
15		แบบฝึกหัดที่ 1.13		
16		แบบฝึกหัดที่ 1.14		

ข้อมูลส่วนตัวผู้เรียน

1. ชื่อ - นามสกุล ชื่อเล่น เลขที่ ชั้น
2. วัน/เดือน/ปี เกิด
3. ที่อยู่ปัจจุบันที่สามารถติดต่อได้
4. เบอร์โทรศัพท์ที่สามารถติดต่อได้ (ระบุความสัมพันธ์-ส่วนตัว-บิดา-มารดา-บุคคลอื่น)
5. Email address (ถ้ามี)
6. hi5 (ถ้ามี)
7. คติประจำใจ
8. ความมุ่งหวังต่อรายวิชา ค 42101

ภาพจินตนาการที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ (*Mathematical Visualization*)

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

ด้วยความปรารถนาดีต่อศิษย์จากใจจริง
 ครูอาหนึ่ง ชูไวย
 มือถือ 086-0789183 (1-2 call)
 Email address : jeng_r1@hotmail.com

คำนำ

การเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้นั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในพื้นฐานคณิตศาสตร์ มีทักษะการคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ ความรู้ ความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย ตลอดจนมีความเข้าใจและรู้จักการใช้เหตุผล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบ และนำความรู้นั้นไปประยุกต์เชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ ได้เป็นอย่างดีสิ่งที่สำคัญก็คือ **มีเจตคติที่ดีต่อวิชา คณิตศาสตร์**

ผู้เรียบเรียงขอขอบคุณความดีในการจัดทำเอกสารเล่มนี้แต่ครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ คณะผู้บริหาร โรงเรียนเทิงวิทยาคมที่ส่งเสริมการพัฒนาผลงานด้านวิชาการ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.) ที่มอบทุนการศึกษาโครงการ สควค. ให้ผู้เรียบเรียงตลอดระยะเวลา 5 ปี จนจบการศึกษา และน้อมเป็นเครื่องสักการบูชาพระคุณแด่บิดามารดา และคุณยายต่อม คำแบ่ง ผู้ล่วงลับที่เป็นกำลังใจให้ผู้เรียบเรียงตลอดมา

อนึ่ง หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อเสนอแนะประการใดสำหรับเอกสารเล่มนี้ผู้เรียบเรียงยินดีรับฟังและจะแก้ไขต่อไป ขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

อาหนึ่ง ชูไวย
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนเทิงวิทยาคม
อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

บูชาอาจารย์คุณแต่บูรพาจารย์คณิตศาสตร์

ข้าพเจ้าขอขอบคุณความดีในครั้งนี้แต่บูรพาจารย์ทางคณิตศาสตร์ที่กรุณาเมตตาอบรมสั่งสอนให้ข้าพเจ้ามีความรู้แตกฉานทางคณิตศาสตร์ ขอน้อมยกกรอุทิศ น้อมจิตอธิษฐานในผลบุญกุศล อันเกิดจากการแต่งตำราแบบฝึกหัดประกอบการเรียนในครั้งนี้นบเหนือก่เป็นเครื่องบูชา สักการะคุณ แต่ครูอุปัชฌาย์ ครูอาจารย์ ซึ่งเป็นเสมือนปอาจารย์ในหมู่ศิษย์ของข้าพเจ้า ตั้งมีรายนามต่อไปนี้ ด้วยความเคารพ รัก ศรัทธา และนับถือเทิดทูน

- คุณพ่อชิต ชูไวย
- คุณแม่ยาย ชูไวย
- คุณยายต่อม คำแบ่ง
- ศาสตราจารย์ ดร.บรรพต สุวรรณประเสริฐ
- ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นน้อม
- ศาสตราจารย์ ดร.สมยศ พลับเที่ยง
- Professor Dr. Yong-Gao Chen
- Professor Dr. Sheng Bau
- Professor Dr. Kause Denéke
- Professor Dr. Ping Zang
- Professor Dr. David A. Paris
- รองศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ มากชู
- รองศาสตราจารย์ ภัทรา เตชาภิวัตย์
- รองศาสตราจารย์ ปราโมทย์ ประเสริฐ
- รองศาสตราจารย์ ม.ล.จันทศรี ชมพูนุท
- รองศาสตราจารย์ วิวรรณ วนิชชาติ
- รองศาสตราจารย์ ดร.บุญญา เพียรสวรรค์
- รองศาสตราจารย์ ศรีวรรณ ถกษักริทัต
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานิชญ์ สิริพิทักษ์เดช
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยวัฒน์ นามนาค
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นรินทร์ เพชรโรจน์
- Assistant Professor Dr. W.W.L. Chen
- Assistant Professor Dr. David A. Santos
- อาจารย์ ดร.ระเบียบ วังศิริ
- อาจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ
- อาจารย์ สุภาพร สุขเสริญ
- อาจารย์ สมพร กล้าเทศ
- ครูวิบูลย์ วิชชานุกาพ
- ครูศุภภรณ์ จอมชาญพันธ์
- ครูนิภาพร เขื่อนแก้ว
- ครูอัสจนา จินดารัตน์
- ครูปรีชา จันทกาญณ์
- ครูสุภลักษณ์ ก้างอนตา
- ครูตุลาพร แสนธิ
- ครูประสาน คันธเรศ
- ครูสุพรรณธ์ ณะหมอก
- ครูนิวัตร คำดอน
- ครูยุพิน คำดอน
- ครูอดิศักดิ์ ธรรมโชติ
- ครูคณิง ธรรมโชติ
- ครูพิมพ์ คำกำยาน
- ครูสุวิทย์ แก้วอินทร์
- ครูสุข จันทวิชัย
- ครูจวงจันทร์ จันท์ทิมา

สารบัญ

แบบบันทึกการส่งงาน	i
ข้อมูลส่วนตัวผู้เรียน	ii
คำนำ	iii
บูชาอาจารย์คุณแต่บูรพาจารย์คณิตศาสตร์	iv
สาระการเรียนรู้ประจำหน่วย	vii
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	vii
1 สมบัติของเลขยกกำลัง	1
1.1 ทบทวนสัญลักษณ์ต่างๆเกี่ยวกับเซต	1
1.2 ทบทวนความรู้เบื้องต้น	1
1.3 สมบัติของเลขยกกำลัง (ช่วงชั้นที่ 3)	5
1.4 แบบฝึกหัดที่ 1.1	9
1.5 แบบฝึกหัดที่ 1.2	10
1.6 แบบฝึกหัดที่ 1.3	11
1.7 แบบฝึกหัดที่ 1.4	12
1.8 คำนำหน้าหน่วย	13
2 การดำเนินการของเลขยกกำลัง	14
2.1 การคูณเลขยกกำลัง	14
2.2 การหารเลขยกกำลัง	16
2.3 ดอกเบี้ยทบต้น	22
2.4 การใช้จำนวนที่มีหน่วยเป็นล้าน	24
3 รากที่ n ของจำนวนจริง	24
3.1 นิยามและตัวอย่าง	24
3.2 ค่าของ a^n ที่ควรทราบ	27
3.3 แบบฝึกหัดที่ 1.5	29
3.4 การเปรียบเทียบค่ายกกำลังของจำนวนจริง	29
3.5 แบบฝึกหัดที่ 1.6	32
3.6 แบบฝึกหัดที่ 1.7	34
3.7 สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง	36
3.8 แบบฝึกหัดที่ 1.8	38
3.9 แบบฝึกหัดที่ 1.9	39
3.10 แบบฝึกหัดที่ 1.10	40
3.11 ตัวอย่างกรณีที่นักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อน	41
3.12 การถอดกรณฑ์ที่ n	42

3.13	กรณีที่เหมือนกัน	43
3.14	แบบฝึกหัดที่ 1.11	43
3.15	การบวก ลบ จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์	44
3.16	แบบฝึกหัดที่ 1.12	47
4	เฉพาะรากที่สอง	49
4.1	การเขียนกรณฑ์ที่ n ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเศษส่วนโดยที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์	50
4.2	แบบฝึกหัดที่ 1.13	51
4.3	ทบทวนการคูณรากที่สอง	52
	4.3.1 การคูณแบบปกติ	52
4.4	แบบฝึกหัดที่ 1.14	53
	4.4.1 การคูณโดยใช้สูตร	54
4.5	สังยุค(conjugate)	58
4.6	รูปแบบพิเศษของรากที่สอง	58
4.7	ปัญหาหาคณ	58
5	ตัวอย่างข้อสอบ	60
6	ตัวอย่างโจทย์ครูอาหนึ่ง	61

สาระการเรียนรู้ประจำหน่วย

1. สมบัติของเลขยกกำลัง
2. การดำเนินการของเลขยกกำลัง
3. รากที่ n ของจำนวนจริง
4. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์
2. เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจาก การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์
3. หาค่าประมาณของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์และจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีคำนวณที่เหมาะสม

หน่วยที่ 1 เลขยกกำลัง

1 สมบัติของเลขยกกำลัง

1.1 ทบทวนสัญลักษณ์ต่างๆเกี่ยวกับเซต

สัญลักษณ์แทนเซต

\mathbb{C}	แทน	เซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers)
\mathbb{R}	แทน	เซตของจำนวนจริง (real numbers)
\mathbb{R}^+	แทน	เซตของจำนวนจริงบวก (positive real numbers)
\mathbb{R}^-	แทน	เซตของจำนวนจริงลบ (negative real numbers)
\mathbb{Q}	แทน	เซตของจำนวนตรรกยะ (rational numbers) = $\{r r = \frac{m}{n}, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}\}$
\mathbb{Q}'	แทน	เซตของจำนวนอตรรกยะ (irrational numbers)
\mathbb{I} หรือ \mathbb{Z}	แทน	เซตของจำนวนเต็ม (integers) = $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{I}^+ หรือ \mathbb{Z}^+	แทน	เซตของจำนวนเต็มบวก (positive integers) = $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{I}^- หรือ \mathbb{Z}^-	แทน	เซตของจำนวนเต็มลบ (negative integers) = $\{\dots, -3, -2, -1\}$
\mathbb{I}^0 หรือ \mathbb{Z}^0	แทน	เซตของจำนวนเต็มศูนย์ = $\{0\}$
\mathbb{N}	แทน	เซตของจำนวนนับ หรือ จำนวนธรรมชาติ (counting numbers or natural numbers) = $\{1, 2, 3, \dots\}$ หรือ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ แล้วแต่การนิยามของผู้ใช้
\mathbb{P}	แทน	เซตของจำนวนเฉพาะ (prime numbers) = $\{p p \in \mathbb{Z} \text{ เมื่อ } p \neq 1, 1 p \text{ และ } p p\}$
\emptyset หรือ $\{\}$	แทน	เซตว่าง (empty set or null set or void set) ; $\emptyset = X, n(X) = 0$
\mathcal{U}	แทน	เซตของเอกภพสัมพัทธ์ (universal set)
$\mathcal{P}(A)$	แทน	เพาเวอร์เซต (power set) ของ A
$n(A)$	แทน	จำนวนสมาชิกของ A

สัญลักษณ์แทนการดำเนินการ

\in หรือ \ni	แทน	เป็นสมาชิก
\notin หรือ \nexists	แทน	ไม่เป็นสมาชิก
\subset หรือ \subseteq	แทน	เป็นสับเซต
\supset หรือ \supseteq	แทน	เป็นสับเซต
$\not\subset$ หรือ $\not\subseteq$	แทน	ไม่เป็นสับเซต
$\not\supset$ หรือ $\not\supseteq$	แทน	ไม่เป็นสับเซต
\cup	แทน	ยูเนียน (union) ; $A \cup B = \{x x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$
\cap	แทน	อินเตอร์เซกชัน (intersection) ; $A \cap B = \{x x \in A \text{ และ } x \in B\}$
$A - B$	แทน	ผลต่าง (difference) ของ A กับ B ; $A - B = \{x x \in A \text{ แต่ } x \notin B\}$
A' หรือ A^c	แทน	คอมพลีเมนต์ (complement) ของ A ; $A' = \mathcal{U} - A = \{x x \in \mathcal{U} \text{ แต่ } x \notin A\}$

1.2 ทบทวนความรู้เบื้องต้น

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

2. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

3. $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$

4. $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$

5. จำนวนเต็ม(integers) คือ จำนวนที่ไม่อยู่ในรูปเศษส่วน(fraction)และทศนิยม (decimal) ประกอบด้วย $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ (นั่นคือ ไม่มีจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดและไม่มีจำนวนเต็มที่มากที่สุด)

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^0 \cup \mathbb{Z}^+ \text{ และ } \mathbb{Z} \text{ เป็นเซตอนันต์}$$

6. จำนวนเต็มลบ(negative integers) ประกอบด้วย $\dots, -3, -2, -1$ (นักเรียนจะสังเกตได้ว่าจำนวนเต็มลบที่มากที่สุด คือ -1) แต่ไม่มีจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุด เนื่องจากจำนวนเต็มลบจำนวนถัดไปจะมีค่าลดลงจากจำนวนก่อนหน้าครั้งละ 1 เสมอ)

$$x_{max} \in \mathbb{Z}^- = -1 \text{ แต่ ไม่มี } x_{min} \in \mathbb{Z}^- \text{ และ } \mathbb{Z}^- \text{ เป็นเซตอนันต์}$$

7. จำนวนเต็มศูนย์ (zero) มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ 0 (นั่นคือ จำนวนเต็มศูนย์ ไม่เป็นจำนวนเต็มลบและไม่เป็นจำนวนเต็มบวก)

$$\mathbb{Z}^0 \text{ เป็นเซตจำกัด}$$

8. จำนวนเต็มบวก(positive integers) ประกอบด้วย $1, 2, 3, \dots$ (นักเรียนจะสังเกตได้ว่าจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด คือ 1) แต่ไม่มีจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด เนื่องจากจำนวนเต็มบวกจำนวนถัดไปจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากจำนวนก่อนหน้าครั้งละ 1 เสมอ)

$$\text{ไม่มี } x_{max} \in \mathbb{Z}^+ \text{ แต่ } x_{min} \in \mathbb{Z}^+ = 1 \text{ และ } \mathbb{Z}^+ \text{ เป็นเซตอนันต์}$$

9. จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ คือ $0, 1, 2, 3, \dots$ (นั่นคือ จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบเป็นจำนวนที่รวมจำนวนเต็มศูนย์กับจำนวนเต็มบวกไว้ด้วยกัน)

$$\text{เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ คือ } \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

10. จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก คือ $\dots, -3, -2, -1, 0$ (นั่นคือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนที่รวมจำนวนเต็มศูนย์กับจำนวนเต็มลบไว้ด้วยกัน)

$$\text{เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก คือ } \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

11. จำนวนเต็มคู่ คือ จำนวนที่หารลงตัว (จำนวนที่หารด้วย 2 แล้ว ไม่มีเศษ หรือ เศษเป็น 0) ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $2|x$ เช่น $2, 4, 6, \dots, 2n$ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$

เซตของจำนวนเต็มคู่ คือ $\{x|x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$

12. จำนวนเต็มคี่ คือ จำนวนที่ 2หารไม่ลงตัว และเหลือเศษเป็น 1
ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $2 \nmid x$ เช่น $1, 3, 5, \dots, 2n + 1$ หรือ $2n - 1$ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$

เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{x|x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$

เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{x|x = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$

13. สมบัติไตรวิภาค (trichotomy properties) กล่าวว่า จำนวนเต็ม a ต้องเป็นจำนวนเต็มประเภทใดประเภทหนึ่ง ใน 3 กรณีต่อไปนี้ เพียงอย่างเดียวเท่านั้น คือ

- $a < 0$ (a ต้องเป็นจำนวนเต็มลบเพียงอย่างเดียวเท่านั้น) หรือ
- $a = 0$ (a ต้องเป็นจำนวนเต็มศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น) หรือ
- $a > 0$ (a ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเพียงอย่างเดียวเท่านั้น)

14. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่า

- $a + b$ เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม) (สมบัติปิดการบวก) (additive closure property)
- $a \times b$ เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มคูณกับจำนวนเต็มได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม) (สมบัติปิดการคูณ) (multiplicative closure property)
- ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b > 0$
- ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $a + b < 0$
- $|a|$ (อ่านว่าค่าสัมบูรณ์ของ a) คือ ระยะห่างจาก a ถึง 0 มีค่าเป็นศูนย์ หรือมีค่าเป็นบวกเสมอ (เพราะระยะไม่ติดลบ)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases} \quad \text{นั่นคือ } |a| \geq 0 \text{ เสมอ}$$

- ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ และ $|a| > |b|$ แล้ว $a + b > 0$
- ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ และ $|a| < |b|$ แล้ว $a + b < 0$
- ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
- ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
- ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
- ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
- ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
- ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
- $a = a$ (สมบัติการสะท้อน (reflexive property))

- ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ (สมบัติการสมมาตร (symmetry property))
- $a \times 0 = 0$ (ทุกๆ จำนวนเต็มคูณกับศูนย์ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์)
- ถ้า $a > b$ และ $c = 0$ แล้ว $ac = bc$ หรือ ถ้า $a < b$ และ $c = 0$ แล้ว $ac = bc$
- $a + (-a) = 0$ เรียก $-a$ ว่า “อินเวอร์สการบวกของ a ”
- $a \times \frac{1}{a} = 1$ เรียก $\frac{1}{a}$ ว่า “อินเวอร์สการคูณของ a ”
- $a + 0 = a$ เรียก 0 ว่า “เอกลักษณ์การบวกของทุกจำนวนเต็ม”
- $a \times 1 = a$ เรียก 1 ว่า “เอกลักษณ์การคูณของทุกจำนวนเต็ม”
- $a + b = b + a$ (สมบัติการสลับที่การบวก (additive commutative property))
- $a \times b = b \times a$ (สมบัติการสลับที่การคูณ (multiplicative commutative property))
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก (additive associative property))
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ (multiplicative associative property))
- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (สมบัติการกระจาย (distributive property))

15. จำนวนตรงข้ามของ a คือ $-a$

16. $a \times b$ (a cross b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a \cdot b$ (a dot b) หรือ ab

17. $a \div b$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ $b \neq 0$

18. $a - b = a + (-b)$ (การลบ คือ การบวกด้วยจำนวนตรงข้าม)

19. จำนวนตรรกยะ + จำนวนตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนตรรกยะ

20. จำนวนตรรกยะ + จำนวนอตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนอตรรกยะ

21. จำนวนอตรรกยะ + จำนวนตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนอตรรกยะ

22. จำนวนอตรรกยะ + จำนวนอตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนตรรกยะ หรือ จำนวนอตรรกยะ ก็ได้

23. จำนวนตรรกยะ \times จำนวนตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนตรรกยะ

24. จำนวนตรรกยะ \times จำนวนอตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนอตรรกยะ โดยที่ จำนวนตรรกยะต้อง $\neq 0$

25. จำนวนอตรรกยะ \times จำนวนตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนอตรรกยะ โดยที่ จำนวนตรรกยะต้อง $\neq 0$

26. จำนวนอตรรกยะ \times จำนวนอตรรกยะ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนตรรกยะ หรือ จำนวนอตรรกยะ ก็ได้

27. จำนวนเต็มบวก \times จำนวนเต็มบวก ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนเต็มบวก

28. จำนวนเต็มบวก \times จำนวนเต็มลบ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนเต็มลบ

29. จำนวนเต็มลบ \times จำนวนเต็มบวก ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนเต็มลบ

30. จำนวนเต็มลบ \times จำนวนเต็มลบ ได้ผลลัพธ์เป็น จำนวนเต็มบวก

1.3 สมบัติของเลขยกกำลัง (ช่วงชั้นที่ 3)

สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ และ สำหรับทุกค่า m, n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

1.
$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

เรียก

- a^n ว่า “เลขยกกำลัง”
- a ว่า “ฐาน”
- n ว่า “เลขชี้กำลัง”

2. $a^0 = 1$

3. 0^0 ไม่นิยาม (ในระดับชั้นนี้ หมายถึง ไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์)

4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ และ $a \neq 0$

5. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$

7. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่าง 1. ค่าของ $3^6 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{6 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 2. ค่าของ $2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 3. ค่าของ $18^{100} = \underbrace{18 \times 18 \times \dots \times 18}_{100 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 4. ค่าของ $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \underbrace{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}_{4 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 5. ค่าของ $6^{-300} = \frac{1}{6^{300}} = \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \dots \times \frac{1}{6}}_{300 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 6. ค่าของ $(-7)^6 = \underbrace{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)}_{6 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 7. ค่าของ $(-2)^{-8} = \frac{1}{(-2)^8} = \underbrace{\frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2}}_{8 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่างเพิ่มเติม (กรณีที่ฐานของเลขยกกำลังไม่เป็นจำนวนเต็ม)

ตัวอย่าง 8. ค่าของ $(0.1)^6 = \underbrace{(0.1) \times (0.1) \times (0.1) \times (0.1) \times (0.1) \times (0.1)}_{6 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 9. ค่าของ $(0.1)^{-6} = \frac{1}{(0.1)^6} = \underbrace{\left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right)}_{6 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 10. ค่าของ $(-0.5)^4 = \underbrace{(-0.5) \times (-0.5) \times (-0.5) \times (-0.5)}_{4 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 11. ค่าของ $(-0.5)^{-4} = \frac{1}{(-0.5)^4} = \underbrace{\left(\frac{1}{-0.5}\right) \times \left(\frac{1}{-0.5}\right) \times \left(\frac{1}{-0.5}\right) \times \left(\frac{1}{-0.5}\right)}_{4 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 12. ค่าของ $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \underbrace{\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7}}_{5 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 13. ค่าของ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}}_{4 \text{ ตัว}} = \underbrace{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}_{4 \text{ ตัว}}$

นักเรียนควรทราบ 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ ที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

นักเรียนควรทราบ 2 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ และทุกจำนวนเต็มบวก n พึงระวัง $-a^n = -(a^n)$

เพื่อช่วยต่อการทำความเข้าใจ และกันความสับสน ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 14. ค่าของ $-5^7 = -(5^7) = \underbrace{-(5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)}_{7 \text{ ตัว}}$

แต่

ตัวอย่าง 15. ค่าของ $(-5)^7 = \underbrace{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)}_{7 \text{ ตัว}}$

นักเรียนควรทราบ 3 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b ใดๆ ที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

นักเรียนควรทราบ 4 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b, c, d ใดๆ ที่ $b, c, d \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

นั่นคือ $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$; กลับเศษเป็นส่วน เปลี่ยนหารเป็นคูณ ส่วนเป็น 0 ไม่มีความหมาย

ตัวอย่าง 16. ค่าของ $5^0 = 1$

ตัวอย่าง 17. ค่าของ $(-7)^0 = 1$

ตัวอย่าง 18. ค่าของ $(0.25)^0 = 1$

ตัวอย่าง 19. ค่าของ $(-0.00125)^0 = 1$

ตัวอย่าง 20. ค่าของ $\left(\frac{8}{13}\right)^0 = 1$

ตัวอย่าง 21. ค่าของ $\left(-\frac{7}{11}\right)^0 = 1$

นักเรียนควรทราบ 5 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ จะได้ว่า $\frac{a}{0}$ ไม่มีความหมาย

นักเรียนควรทราบ 6 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ ที่ $a \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{0}{a} = 0$

ตัวอย่าง 22. ค่าของ	{	$\frac{0}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม
		$\frac{2}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม
		$\frac{-3}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม
		$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม
		$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม
		$\frac{1.25}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม
		$\frac{-0.000012456}{0}$	ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม

ตัวอย่าง 23. ค่าของ	{	$\frac{0}{2} = 0$
		$\frac{0}{-3} = 0$
		$\frac{0}{0.222} = 0$
		$\frac{0}{-1.28} = 0$
		$\frac{0}{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 0$
		$\frac{0}{1.25} = 0$
		$\frac{0}{-0.00157} = 0$

ตัวอย่าง 24. ค่าของ $(-5)^2 \times (-5)^7 = (-5)^{2+7} = (-5)^9$

ตัวอย่าง 25. ค่าของ $(-2)^9 \div (-2)^7 = (-2)^{9-7} = (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

คำถาม 26. จงหาค่าของ $128 \times 2^5 \times 2^{-4}$

คำถาม 27. จงหาค่าของ $\frac{7^0 \times 7^{-6} \times 7^8}{(-7)^4 \times 7^2}$

จากคำถามที่ 27 นักเรียนทราบว่า

1. จำนวนเต็มลบคูณกันกี่ตัว ได้ผลลัพธ์เป็น
2. จำนวนเต็มลบคูณกันคู่ตัว ได้ผลลัพธ์เป็น

คำถาม 28. จงหาค่าของ $32 \times 2^7 \times (-2)^{-5}$

คำถาม 29. จงหาค่าของ $(3^{7x} \times 3^{4x}) \div (3^0 \times 3^{5x})$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวก

คำถาม 30. จงหาค่าของ $((y^7 \times y^4) \div (y^0 \times y^{11}))^5$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็มบวก

คำถาม 31. จงหาค่าของ $-\left(\frac{13x^9}{65x^7}\right)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม และ $x \neq 0$

1.4 แบบฝึกหัดที่ 1.1

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปผลคูณของเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $4^6 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

1. $3^5 = \dots\dots\dots$
2. $-4^6 = \dots\dots\dots$
3. $(-2)^6 = \dots\dots\dots$
4. $-(-3)^4 = \dots\dots\dots$
5. $4^{-2} = \dots\dots\dots$
6. $-3^{-5} = \dots\dots\dots$
7. $(x^4)^3 = \dots\dots\dots$
8. $(2a^5)^4 = \dots\dots\dots$
9. $(0.2009)^5 = \dots\dots\dots$
10. $(0.2552)^{-6} = \dots\dots\dots$
11. $(-3)^{-7} = \dots\dots\dots$
12. $\left(2\frac{5}{8}\right)^4 = \dots\dots\dots$
13. $\left(-4\frac{1}{3}\right)^{-3} = \dots\dots\dots$
14. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \dots\dots\dots$
15. $-\left(\left(\frac{2}{7}\right)^4\right) = \dots\dots\dots$
16. $-\left(\left(\frac{2a}{3}\right)^{-5}\right) = \dots\dots\dots$

1.5 แบบฝึกหัดที่ 1.2

คำสั่ง จงหาผลลัพธ์จำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

1. $2^4 \times 2^0 \times 2^8$

.....

2. $3^7 \times 3^{-5} \times 3^{-2}$

.....

3. $(-3)^8 \times (-3)^4 \times (-3)^{-5}$

.....

4. $-27 \times (-3)^0 \times (-3)^{-6}$

.....

5. $128 \times 2^{10} \times (-2)^{-5}$

.....

6. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (0.25)^0 \times \left(\frac{3}{12}\right)^{-4}$

.....

7. $x^{-4} \times x^{12} \times x^0$ เมื่อ $x \neq 0$

.....

8. $5^{3n} \times 5^0 \times 5^{-n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

.....

9. $4^{-2n} \times 4^0 \times 4^{2-n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

.....

10. $2^{4n} \times 2^{8n+1} \times 2^{-2n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

.....

นักเรียนควรรอบ 7 ค่าของ $x_1^{x_2^{x_3^{\dots^{x_n}}}}$ = $x_1^{\left(x_2^{\left(x_3^{\left(\dots^{\left(x_n\right)}\right)}\right)}\right)}$ โดยที่แต่ละ $x_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \dots$

ตัวอย่าง 32. ค่าของ $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^{(3 \times 3)} = 2^9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$

ตัวอย่าง 33. ค่าของ $100^{10^{10000}0^{1^{100}}}$ = $100^{\left(10^{\left(10000^{\left(0^{(1^{100})}\right)}\right)}\right)}$ = $100^{\left(10^{\left(10000^{(0^1)}\right)}\right)}$ = $100^{\left(10^{(10000^0)}\right)}$
 $= 100^{(10^1)} = 100^{10}$

1.6 แบบฝึกหัดที่ 1.3

คำสั่ง จงหาผลลัพธ์จำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9$

1. $2^{2^2} = \dots\dots\dots$

2. $3^{1^{3^{8^{0^9}}}}$ = $\dots\dots\dots$

3. $4^{2^{4^{0^{20^1}}}}$ = $\dots\dots\dots$

4. $6^{7^{0^{6^{12}}}}$ = $\dots\dots\dots$

5. $10^{2^{10^0}}$ = $\dots\dots\dots$

6. $2^{2^{2^2}}$ = $\dots\dots\dots$

7. $3^{2^{3^2}}$ = $\dots\dots\dots$

8. $5^{2^{15}} = \dots\dots\dots$

9. $10^{10^{2^{1000^{10}}}} = \dots\dots\dots$

10. $10^{10^{1000^{0^{1^{100}}}}} = \dots\dots\dots$

นักเรียนควรสังเกต $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ a^0 = 1 & \text{เมื่อ } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n > m \end{cases}$ โดยที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

1.7 แบบฝึกหัดที่ 1.4

คำสั่ง จงหาผลลัพธ์จำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

1. $\frac{(3^2 \times 5^7)^0 \times 2^{10}}{2^{-3} \times 2^7}$

.....

.....

.....

5. $\frac{(2^4)^2 \times 8}{2^4 \times 2^6}$

.....

.....

.....

2. $\frac{3x^{-4}y^4}{4x^6y^5}$ เมื่อ $x, y \neq 0$

.....

.....

.....

6. $\frac{2^{-7} \times 2^3 \times (2^3)^2}{2^{-6} \times 2^{-2}}$

.....

.....

.....

3. $\frac{5^3 \times 25 \times 5}{(5^2)^2}$

.....

.....

.....

7. $\left(\frac{2^5 \times 2^3 \times 16}{2^{-6} \times 2^4 \times 8}\right)^2$

.....

.....

.....

4. $\frac{(4^3)^2}{(256)^2}$

.....

.....

.....

8. $\left(\frac{2^0 \times 3^5 \times 4^{-3}}{5^{-1} \times 6^6}\right)^2 \times \left(\frac{5^5 \times 6^{-1}}{2^3 \times 3^{-2} \times 4^3}\right)^3$

.....

.....

.....

1.8 คำนำหน้าหน่วย

ในทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ได้กำหนด คำนำหน้าหน่วย หรือ คำอุปสรรค ขึ้นมาเพื่อให้เกิดความสะดวกต่อการนำไปใช้ โดยเขียนในรูป $A \times 10^n$, n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ดังนี้

รูปแบบ	คำนำหน้าหน่วย หรือ คำอุปสรรค (SI's prefixes)	
	ชื่อ	สัญลักษณ์
10^n		
10^{-24}	ยอกโต (yocto)	y
10^{-21}	เซปโต (septo)	z
10^{-18}	อัตโต (atto)	a
10^{-15}	เฟมโต (femto)	f
10^{-12}	พิโก (pico)	p
10^{-9}	นาโน (nano)	n
10^{-6}	ไมโคร (micro)	μ
10^{-3}	มิลลิ (milli)	m
10^{-2}	เซนติ (centi)	c
10^{-1}	เดซี (deci)	d
10^1	เดคา (deca)	da
10^2	เฮกโต (hecto)	h
10^3	กิโล (kilo)	k
10^6	เมกกะ (mega)	M
10^9	จิกะ (giga)	G
10^{12}	เทระ (tera)	T
10^{15}	เพตะ (peta)	P
10^{18}	เอกซะ (exa)	E
10^{21}	เซตตะ (zetta)	Z
10^{24}	ยอตตะ (yotta)	Y

คำนำหน้าหน่วยต่อไปนี้ ใช้เขียนนำหน้าหน่วยฐาน¹ (base unit) และ หน่วยอนุพัทธ์² (derived unit) ของระบบวัดนานาชาติ (Système International d'unités : SI units)

หมายเหตุ

1. คำนำหน้านาม บางที่เราจะเรียกว่า **ตัวพหุคูณ(Multiple)**
2. การใช้คำนำหน้าหน่วยแต่ละคำควรใช้ครั้งเดียว ไม่นิยมเขียนคำนำหน้าหน่วยซ้ำกัน เช่น 1×10^{-12} เมตร อ่านว่า 1 พิโกเมตร ไม่นิยมอ่าน 1 มิลลินาโนเมตร ($\because 10^{-12} = 10^{-3} \times 10^{-9}$) หรือ 1 ไมโครไมโครเมตร ($\because 10^{-12} = 10^{-6} \times 10^{-6}$)
3. นักเรียนได้ศึกษาหน่วยฐานของระบบ SI บางหน่วย ในระดับชั้น ม.2 ของรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 32101) บทที่ 2 มาแล้ว

¹นักเรียนจะได้เรียนในวิชาวิทยาศาสตร์

²นักเรียนจะได้เรียนในวิชาวิทยาศาสตร์

2 การดำเนินการของเลขยกกำลัง

2.1 การคูณเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า เมื่อแทน a เป็นจำนวนใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ &= a^{n+m} \\ &= a^n \times a^m \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 34. จงหาผลลัพธ์ของ $5^5 \times 3^0 \times 5^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 5^5 \times 3^0 \times 5^2 &= 5^5 \times 1 \times 5^2 \\ &= 5^5 \times 5^2 \\ &= 5^{5+2} \\ &= 5^7 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 35. จงหาผลลัพธ์ของ $(-3)^4 \times (-3)^7 \times (-3)^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (-3)^4 \times (-3)^7 \times (-3)^2 &= (-3)^{4+7+2} \\ &= (-3)^{13} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 36. จงหาผลลัพธ์ของ $(0.09)^{10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (0.09)^{10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 &= ((0.3)^2)^{10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 \\ &= (0.3)^{2 \times 10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 \\ &= (0.3)^{20} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 \\ &= (0.3)^{20+(-4)+3} \\ &= (0.3)^{20-4+3} \\ &= (0.3)^{19} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 37. จงหาผลลัพธ์ของ $2^4 \times 32$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 2^4 \times 32 &= 2^4 \times 2^5 \\ &= 2^{4+5} \\ &= 2^9 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 38. จงหาผลลัพธ์ของ $2^5 \times (-2)^{-4}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad 2^5 \times (-2)^{-4} &= 2^5 \times \frac{1}{(-2)^4} \\
 &= 2^5 \times \left(\frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)} \right) \\
 &= 2^5 \times \frac{1}{16} \\
 &= 2^5 \times \left(\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} \right) \\
 &= 2^5 \times \frac{1}{2^4} \\
 &= 2^5 \times 2^{-4} \\
 &= 2^{5+(-4)} \\
 &= 2^1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 39. จงหาผลลัพธ์ของ $x^{4n} \times x^{-12n} \times x^0$ เมื่อ $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad x^{4n} \times x^{-12n} \times x^0 &= x^{4n+(-12n)+0} \\
 &= x^{4n+(-12n)} \\
 &= x^{4n-12n} \\
 &= x^{-8n} \\
 &= \frac{1}{x^{8n}}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 40. จงหาผลลัพธ์ของ $(-2)^{-7} \times (-32) \times 2^3$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad (-2)^{-7} \times (-32) \times 2^3 &= (-2)^{-7} \times (-2)^5 \times 2^3 \\
 &= (-2)^{-7} \times (-2) \times (-2)^4 \times 2^3 \\
 &= (-2)^{-7} \times (-2)^1 \times (-2)^4 \times 2^3 \\
 &= (-2)^{-7+1} \times (-2)^4 \times 2^3 \\
 &= (-2)^{-6} \times (-2)^4 \times 2^3 \\
 &= 2^{-6} \times 2^4 \times 2^3 \\
 &= 2^{-6+4+3} = 2^1 = 2
 \end{aligned}$$

จากข้อ 46 จะได้ว่า เมื่อแทน a เป็นจำนวนใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า

$$(-a)^n = a^n \text{ และ } (-a)^{-n} = a^{-n}$$

2.2 การหารเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า เมื่อแทน a เป็นจำนวนใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= a^{m-n} \\ &\neq a^{n-m} \\ &\neq a^n \div a^m \text{ เมื่อ } m \neq n \end{aligned}$$

และ

$$\text{นักเรียนควรสังเกต } \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ a^0 = 1 & \text{เมื่อ } m = n \text{ โดยที่ } a \neq 0 \text{ และ } m, n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n > m \end{cases}$$

และ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ตัวอย่าง 41. จงหาผลลัพธ์ของ $2^4 \div 32$

วิธีทำ $2^4 \div 32 = 2^4 \div 2^5$

$$\begin{aligned} &= 2^{4-5} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2^1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Note

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 42. จงหาผลลัพธ์ของ $(-3)^5 \div -3^5$

วิธีทำ $(-3)^5 \div (-3^5) = (-3)^5 \div (-3^5)$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\underbrace{(-3) \times (-3)}_9 \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_9 \times (-3) \right) \div \left((-3) \times \underbrace{3 \times 3}_9 \times \underbrace{3 \times 3}_9 \right) \\
 &= \left(\underbrace{(-3) \times (-3)}_9 \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_9 \times (-3) \right) \div \left((-3) \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_9 \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_9 \right) \\
 &= (-3)^5 \div (-3)^5 \\
 &= (-3)^{5-5} \\
 &= (-3)^0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 43. จงหาผลลัพธ์ของ $9m^{-4}n^{-6} \div (-3)m^5n^5$

วิธีทำ $9m^{-4}n^{-6} \div (-3)m^5n^5 = \frac{9m^{-4}n^{-6}}{(-3)m^5n^5}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-3)^2 m^{-4} n^{-6}}{(-3)m^5 n^5} \\
 &= \frac{(-3)^2 m^{-4} n^{-6}}{(-3)^1 m^5 n^5} \\
 &= (-3)^{2-1} \cdot m^{-4-5} \cdot n^{-6-5} \\
 &= (-3)^1 \cdot m^{-9} \cdot n^{-11} \\
 &= (-3) \cdot \left(\frac{1}{m^9} \right) \cdot \left(\frac{1}{n^{11}} \right) \\
 &= \frac{-3}{m^9 n^{11}}
 \end{aligned}$$

คำถาม 44. จงหาผลลัพธ์ของ $3^{2x} \div 3^{-2x}$

ตัวอย่าง 45. จงเขียน $4^8 \times a^5 \times 4^{-2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $a \neq 0$

วิธีทำ $4^8 \times a^5 \times 4^{-2} = 4^8 \times 4^{-2} \times a^5$

$$\begin{aligned}
 &= 4^{8+(-2)} \times a^5 \\
 &= 4^6 \times a^5 \\
 &= 4^6 a^5
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 46. จงเขียน $2^{12} \times b^7 \times b^{-5} \times 4^{-4}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 2^{12} \times b^7 \times b^{-5} \times 4^{-4} &= 2^{12} \times 4^{-4} \times b^7 \times b^{-5} \\ &= 2^{12+(-4)} \times b^{7+(-5)} \\ &= 2^8 \times b^2 \\ &= 2^8 b^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 47. จงเขียน $3^8 \times a^{-2} \times 3^{-5}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 3^8 \times a^{-2} \times 3^{-5} &= 3^8 \times 3^{-3} \times a^{-2} \\ &= 3^{8+(-3)} \times a^{-2} \\ &= 3^3 \times a^{-2} \\ &= 3^3 \times \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{3^3}{a^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 48. จงเขียน $5^{-5} \times b^4 \times b^{-3} \times 5^3$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 5^{-5} \times b^4 \times b^{-3} \times 5^3 &= 5^{-5} \times 5^3 \times b^4 \times b^{-3} \\ &= 5^{-5+3} \times b^{4+(-3)} \\ &= 5^{-2} \times b^1 \\ &= \frac{1}{5^2} \times b \\ &= \frac{b}{5^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 49. ถ้า $a^x = 5$ แล้ว a^{5x} มีค่าเป็นเท่าใด

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก } a^x &= 5 \\ a^{5x} &= (a^x)^5 \\ &= 5^5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 50. ถ้า $a^{-x} = 7$ แล้ว a^{-4x} มีค่าเป็นเท่าใด

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก } a^{-x} &= 7 \\ a^{-4x} &= (a^{-x})^4 \\ &= 7^4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 51. ถ้า $a^x = 3$ แล้ว a^{-3x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $a^x = 3$

$$a^{3x} = (a^x)^3$$

$$= 3^3$$

$$= 27$$

$$a^{-3x} = \frac{1}{a^{3x}}$$

$$= \frac{1}{27}$$

Note

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 52. ถ้า $a^{-x} = 2$ แล้ว a^{2x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $a^{-x} = 2$

$$a^{-2x} = (a^{-x})^2$$

$$= 2^2$$

$$= 4$$

$$a^{2x} = a^{-(-2x)}$$

$$= \frac{1}{a^{-2x}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Note

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 53. ถ้า $(27)^{-x} = 8$ แล้ว $(81)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $(27)^{-x} = 8$

$$\text{จะได้ว่า } (3^3)^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$(3^x)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\text{ดังนั้น } 3^x = \frac{1}{2}$$

$$\text{พิจารณา } 81 = 3^4$$

$$\text{จะได้ว่า } 81^x = (3^4)^x$$

$$= (3^x)^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{ดังนั้น } (81)^x = \frac{1}{16}$$

คำถาม 54. ถ้า $(125)^{-x} = 27$ แล้ว $(25)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

คำถาม 55. ถ้า $(16)^{-x} = 81$ แล้ว 8^{2x} มีค่าเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

คำถาม 56. ถ้า $(32)^{-x} = 243$ แล้ว $(16)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

คำถาม 57. ถ้า $(25)^2 = 5^x$ แล้ว $2x^2 - 1$ มีค่าเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

คำถาม 58. ถ้า $(27)^{-x} = \frac{1}{27}$ แล้ว $(4)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 59. จงเขียน $\frac{(2^4)^3 \times (2^2)^4 \times (0.02)^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \frac{(2^4)^3 \times (2^2)^4 \times (0.02)^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5} &= \frac{2^{(4 \times 3)} \times 2^{(2 \times 4)} \times (2 \times 10^{-2})^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5} \\
 &= \frac{2^{12} \times 2^8 \times (2 \times 10^{-2})^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)} \\
 &= \frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times (-1) \times (2 \times 10^{-2})^1} \\
 &= \frac{2^{12} \times 2^8}{-(2^{15} \times 2^6 \times (2 \times 10^{-2})^1)} \\
 &= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times 2 \times 10^{-2}}\right) \\
 &= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times 2^1 \times \frac{1}{10^2}}\right) \\
 &= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8 \times 10^2}{2^{15} \times 2^6 \times 2^1}\right) \\
 &= -\left(\frac{2^{(12+8)} \times 100}{2^{(15+6+1)}}\right) \\
 &= -\left(\frac{2^{20} \times 100}{2^{22}}\right) \\
 &= -(2^{(20-22)} \times 100) \\
 &= -(2^{-2} \times 100) \\
 &= -\left(\frac{1}{4} \times 100\right) \\
 &= -25
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 60. จงเขียน $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} \times b^{-1}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} \times b^{-1}} &= \frac{\left(\frac{1}{a^1} + \frac{1}{b^1}\right)}{(a \times b)^{-1}} \\
 &= \frac{\left(\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}\right)}{\left(\frac{1}{ab}\right)} \\
 &= \left(\frac{a+b}{ab}\right) \cdot \left(\frac{ab}{1}\right) \\
 &= a + b
 \end{aligned}$$

2.3 ดอกเบี้ยทบต้น

ดอกเบี้ย คือ ผลตอบแทนที่ได้รับจากการนำเงินไปลงทุนหรือให้ผู้อื่นกู้ยืมไปใช้ประโยชน์ รวมไปถึงการนำไปฝากธนาคาร ซึ่งผู้ลงทุนหรือผู้ให้กู้ยืมหวังผลตอบแทนจากการลงทุนหรือการให้กู้ยืมเงินนั้น ดอกเบี้ยสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ดอกเบี้ยคงต้น (Simple Interest)
2. ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)

ดอกเบี้ยคงต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้นเริ่มแรก ซึ่งจะทำให้จำนวนดอกเบี้ยคงที่เท่ากันทุกปี³

ดอกเบี้ยทบต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้นเริ่มแรกบวกกับดอกเบี้ยที่ได้รับในแต่ละงวดที่ผ่านมา ซึ่งมีผลให้ดอกเบี้ยที่คำนวณได้เพิ่มขึ้นทุกปีตามเงินต้นที่เพิ่มขึ้น

การคำนวณดอกเบี้ยทบต้นจะยุ่งยากกว่าการคำนวณดอกเบี้ยคงต้น เพราะเงินต้นที่นำมาคิดดอกเบี้ยในแต่ละปีจะไม่เท่ากัน และการคิดดอกเบี้ยทบต้นยังนิยมคิดต่อช่วงเวลาที่แตกต่างกัน เช่น ดอกเบี้ยทบต้นต่อปี ต่อครึ่งปี ต่อเดือน หรือต่อวันก็ได้ขึ้นอยู่กับประเภทของธุรกิจ เงินที่ได้จากดอกเบี้ยรวมกับเงินต้น เรียกว่า **เงินรวม**

ดอกเบี้ยทบต้นมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

โดยที่

- A แทน เงินรวมเมื่อสิ้นปี t (บาท)
- P แทน เงินต้น (บาท)
- r แทน อัตราดอกเบี้ย คิดเป็นร้อยละต่อปี
- t แทน เวลา (ปี หรือ ครั้ง)

หมายเหตุ

- เงินรวม (A) = เงินต้น + ดอกเบี้ย
- เงินต้น = เงินรวม - ดอกเบี้ย
- ดอกเบี้ย = เงินรวม - เงินต้น

³นักเรียนจะได้ศึกษารายละเอียดในเรื่องนี้ เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ วิชา คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.2 รหัส ค 22101

ตัวอย่าง 61. ฝากเงินไว้กับธนาคาร 20,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละหนึ่งครั้ง อยากทราบว่าเมื่อฝากเงินครบเวลา 3 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่าใด

วิธีทำ จาก $A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

และ $P = 20,000$

$r = 2 \%$ ต่อปี

$t = 3$ ปี

และ $A = 20,000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3$
 $= 20,000(1 + 0.02)^3$
 $= 20,000(1.02)^3$
 $= 21,224.16$

นั่นคือ เมื่อฝากเงินครบเวลา 3 ปี จะได้เงินรวม = 21,224.16 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบเวลา 3 ปี จะได้ดอกเบี้ย = 21,224.16 – 20,000 = 1,224.16 บาท

ตัวอย่าง 62. ฝากเงินไว้กับธนาคาร 40,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้น 6 เดือนต่อครั้ง อยากทราบว่าเมื่อฝากเงินครบเวลา 5 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่าใด

วิธีทำ จาก $A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

และ $P = 40,000$

$r = 1.5 \%$ ต่อปี (\because คิดอัตราดอกเบี้ยปีละ 2 ครั้ง $r = \frac{3}{2} = 1.5\%$ ต่อปี)

$t = 10$ ครั้ง (\because คิดอัตราดอกเบี้ยปีละ 2 ครั้ง 5 ปี = $5 \times 2 = 10$ ครั้ง)

และ $A = 40,000 \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)^{10}$
 $= 40,000(1 + 0.015)^{10}$
 $= 40,000(1.015)^{10}$
 $= 46,421.633$

นั่นคือ เมื่อฝากเงินครบเวลา 5 ปี จะได้เงินรวม = 46,421.633 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบเวลา 5 ปี จะได้ดอกเบี้ย = 46,421.633 – 40,000 = 6,421.633 บาท

2.4 การใช้จำนวนที่มีหน่วยเป็นล้าน

จากเนื้อหา เรื่อง สัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว จะพบว่า

1 ล้าน	=	1,000,000	เขียนแทนด้วย	1×10^6
10 ล้าน	=	10,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^1 \times 10^6$
100 ล้าน	=	100,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^2 \times 10^6$
1,000 ล้าน	=	1,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^3 \times 10^6$
10,000 ล้าน	=	10,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^4 \times 10^6$
100,000 ล้าน	=	100,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^5 \times 10^6$
1,000,000 ล้าน	=	1,000,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^6 \times 10^6$
⋮		⋮	⋮	⋮
$\underbrace{1,000,000 \dots, 000}_{n \text{ ตัว}}$ ล้าน	=	$\underbrace{1,000,000 \dots, 000,000,000}_{n+6 \text{ ตัว}}$	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^n \times 10^6$

3 รากที่ n ของจำนวนจริง

3.1 นิยามและตัวอย่าง

นิยาม 63. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ a, b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ที่ } n > 1 \text{ และ } a, b \in \mathbb{R}, b \text{ เป็นรากที่ } n \text{ ของ } a \Leftrightarrow b^n = a$$

นิยาม 64. สัญลักษณ์ $\sqrt{\quad}$ อ่านว่า กรณฑ์ (root or radical sign) นั่นคือ

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ที่ } n > 1 \text{ และ } a, b \in \mathbb{R}, b \text{ เป็น } \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

โดยปกติแล้ว $\sqrt[n]{a}$ นิยามอ่านว่า “รากที่ n ของ a ” หรือ “กรณฑ์ที่ n ของ a ”

- ☞ เรียก n ว่า “ดัชนีของกรณฑ์ (index of root)” และ
- ☞ เรียก a ว่า “ตัวถูกลดกรณฑ์ (radicand)”
- ☞ สำหรับรากที่สองของ a ไม่นิยมเขียน $\sqrt[2]{a}$ แต่นิยมเขียนเพียง \sqrt{a}

พิจารณาต่อไปนี้

กำหนดค่า	$n = 2$	จะได้ว่า	$b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a$	อ่านว่า	b เป็นรากที่ 2 ของ a
	$n = 3$		$b = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow b^3 = a$		b เป็นรากที่ 3 ของ a
	$n = 4$		$b = \sqrt[4]{a} \Leftrightarrow b^4 = a$		b เป็นรากที่ 4 ของ a
	$n = 5$		$b = \sqrt[5]{a} \Leftrightarrow b^5 = a$		b เป็นรากที่ 5 ของ a
	$n = 6$		$b = \sqrt[6]{a} \Leftrightarrow b^6 = a$		b เป็นรากที่ 6 ของ a
	$n = 7$		$b = \sqrt[7]{a} \Leftrightarrow b^7 = a$		b เป็นรากที่ 7 ของ a
	$n = 8$		$b = \sqrt[8]{a} \Leftrightarrow b^8 = a$		b เป็นรากที่ 8 ของ a
	$n = 9$		$b = \sqrt[9]{a} \Leftrightarrow b^9 = a$		b เป็นรากที่ 9 ของ a
	$n = 10$		$b = \sqrt[10]{a} \Leftrightarrow b^{10} = a$		b เป็นรากที่ 10 ของ a
	$n = 11$		$b = \sqrt[11]{a} \Leftrightarrow b^{11} = a$		b เป็นรากที่ 11 ของ a
	$n = 12$		$b = \sqrt[12]{a} \Leftrightarrow b^{12} = a$		b เป็นรากที่ 12 ของ a
	$n = 13$		$b = \sqrt[13]{a} \Leftrightarrow b^{13} = a$		b เป็นรากที่ 13 ของ a
	\vdots		\vdots		\vdots
	$n = m$		$b = \sqrt[m]{a} \Leftrightarrow b^m = a$		b เป็นรากที่ m ของ a

ซึ่ง $m \in \mathbb{Z}^+$ และ $m \neq 1$

หมายเหตุ

- ถ้า $a = 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a} = 0$
- ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a} > 0$ ($\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนเต็มบวก)
- ถ้า $a < 0$ จะได้ว่า $\begin{cases} \sqrt[n]{a} \text{ เป็นจำนวนจริงลบ} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \sqrt[n]{a} \text{ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 65. $2 = \sqrt[4]{16}$ หมายถึง $2^4 = 16$

ตัวอย่าง 66. $-2 = \sqrt[5]{-32}$ หมายถึง $(-2)^5 = -32$

ตัวอย่าง 67. $\frac{3}{4} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ หมายถึง $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

ทฤษฎีบท 68. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ที่ $n > 1$ และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคู่ จะมีรากที่ n ของ a เป็นจำนวนจริง 2 ค่า
2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคี่ จะมีค่ารากที่ n ของ a เป็นจำนวนจริง 1 ค่า
3. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบและ n เป็นจำนวนคู่ จะไม่มีรากที่ n ที่เป็นจำนวนจริง
4. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ และ n เป็นจำนวนคี่ จะมีรากที่ n ของ a เป็นจำนวนจริง 1 ค่า

นิยาม 69. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่และ a เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

1. $\sqrt[n]{a}$ แทนรากที่ n ของ a ที่เป็นบวก เรียก a ว่า ค่าหลักของรากที่ n ของ a (principle n th root of a)
2. $-\sqrt[n]{a}$ แทนรากที่ n ของ a ที่เป็นลบ

ตัวอย่าง 70. พิจารณา 4 เป็นจำนวนเต็มคู่จะได้ว่า

- จาก $2^4 = 16$ ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 ที่เป็นบวกของ 16 คือ 2 (นั่นคือ $\sqrt[4]{16} = 2$) และ
- จาก $(-2)^4 = 16$ ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 ที่เป็นลบของ 16 คือ -2 (นั่นคือ $-\sqrt[4]{16} = -2$)
- ไม่มี $\sqrt[4]{-16}$ และ $-\sqrt[4]{-16}$ ที่เป็นจำนวนจริง เพราะไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่ยกกำลัง 4 แล้วเท่ากับ -16

นิยาม 71. สำหรับ $n \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $a \in \mathbb{R}$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ แทน รากที่ n ของ a

ตัวอย่าง 72. พิจารณา 5 เป็นจำนวนเต็มคี่จะได้ว่า

- จาก $2^5 = 32$ ดังนั้น รากที่ 5 ของ 32 คือ 2 (นั่นคือ $\sqrt[5]{32} = 2$) และ
- จาก $(-2)^5 = -32$ ดังนั้น รากที่ 5 ของ -32 คือ -2 (นั่นคือ $\sqrt[5]{-32} = -2$)

ข้อสังเกต 73. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \sqrt[n]{-a} \in \mathbb{R} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \\ \sqrt[n]{-a} \notin \mathbb{R} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}^* \\ \sqrt[n]{0} = 0 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

หมายเหตุ * ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

3.2 ค่าของ a^n ที่ควรทราบ

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

$2^6 = 64$

$2^7 = 128$

$2^8 = 256$

$2^9 = 512$

$2^{10} = 1,024$

$5^0 = 1$

$5^1 = 5$

$5^2 = 25$

$5^3 = 125$

$5^4 = 625$

$5^5 = 3,125$

$5^6 = 15,625$

$5^7 = 78,125$

$5^8 = 390,625$

$5^9 = 1,953,125$

$5^{10} = 9,765,625$

$8^0 = 1$

$8^1 = 8$

$8^2 = 64$

$8^3 = 512$

$8^4 = 4,096$

$8^5 = 32,768$

$8^6 = 262,144$

$8^7 = 2,097,152$

$8^8 = 16,777,216$

$8^9 = 134,217,738$

$8^{10} = 1,073,741,824$

$3^0 = 1$

$3^1 = 3$

$3^2 = 6$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$3^5 = 243$

$3^6 = 729$

$3^7 = 2,187$

$3^8 = 6,561$

$3^9 = 19,638$

$3^{10} = 59,049$

$6^0 = 1$

$6^1 = 6$

$6^2 = 36$

$6^3 = 216$

$6^4 = 1,296$

$6^5 = 7,776$

$6^6 = 46,656$

$6^7 = 279,936$

$6^8 = 1,679,616$

$6^9 = 10,077,696$

$6^{10} = 60,466,176$

$9^0 = 1$

$9^1 = 9$

$9^2 = 81$

$9^3 = 729$

$9^4 = 6,516$

$9^5 = 59,049$

$9^6 = 531,441$

$9^7 = 4,782,969$

$9^8 = 43,046,721$

$9^9 = 387,420,489$

$9^{10} = 3,486,784,401$

$4^0 = 1$

$4^1 = 4$

$4^2 = 16$

$4^3 = 64$

$4^4 = 256$

$4^5 = 1,024$

$4^6 = 4,096$

$4^7 = 16,384$

$4^8 = 65,536$

$4^9 = 262,144$

$4^{10} = 1,048,576$

$7^0 = 1$

$7^1 = 7$

$7^2 = 49$

$7^3 = 343$

$7^4 = 2,401$

$7^5 = 16,807$

$7^6 = 117,649$

$7^7 = 823,543$

$7^8 = 5,764,801$

$7^9 = 40,535,607$

$7^{10} = 282,475,249$

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1,000$

$10^4 = 10,000$

$10^5 = 100,000$

$10^6 = 1,000,000$

$10^7 = 10,000,000$

$10^8 = 100,000,000$

$10^9 = 1,000,000,000$

$10^{10} = 10,000,000,000$

นักเรียนควรทราบ 8 สำหรับ a^n	$\left\{ \begin{array}{l} (-a)^n = -a \cdot (-a)^{n-1} \\ \quad = -a \cdot a^{n-1} \\ \quad = -a^n \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ a^n = (-a)^n \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{array} \right.$
---------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

ตัวอย่าง 74. พิจารณา $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 4 \times 4 = 16 = 4^2$

ตัวอย่าง 75. พิจารณา $(-2)^3 = (-2) \times (-2)^{3-1} = (-2) \times 2^2 = (-2) \times 4 = -2^3 = -8 = -2^3$

นักเรียนควรทราบ 9 สำหรับ $a \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$

ตัวอย่าง 76. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{-3}\right)^{-4} = (-3)^4 = 3^4$

ตัวอย่าง 77. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3} = (-2)^3$

ตัวอย่าง 78. $\left(\frac{1}{2x^2}\right)^{-5} = (2x^2)^5$ เมื่อ $x \neq 0$

นักเรียนควรทราบ 10 สำหรับ $a, b \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ตัวอย่าง 79. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^4$

ตัวอย่าง 80. $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-5} = \left(-\frac{7}{5}\right)^5$

ตัวอย่าง 81. $\left(-\frac{2x}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2x}\right)^2 = \left(\frac{5}{2x}\right)^2$ เมื่อ $x \neq 0$

ตัวอย่าง 82. $\left(\frac{4}{9y}\right)^{-3} = \left(\frac{9y}{4}\right)^3$ เมื่อ $y \neq 0$

ตัวอย่าง 83. $\left(\frac{2x}{5y}\right)^{-7} = \left(\frac{5y}{2x}\right)^7$ เมื่อ $x, y \neq 0$

ตัวอย่าง 84. $\left(\frac{3x}{4y}\right)^{-6} = \left(-\frac{4y}{3x}\right)^6 = \left(\frac{4y}{3x}\right)^6$ เมื่อ $x, y \neq 0$

ตัวอย่าง 85. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-3} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3$ เมื่อ $x \neq y$

ตัวอย่าง 86. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} = \left(-\frac{x-y}{x+y}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$ เมื่อ $x \neq y$

3.3 แบบฝึกหัดที่ 1.5

คำสั่ง จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

ข้อ	รากที่ n ของ a ในรูป $\sqrt[n]{a}$	คำอ่าน	เลขดัชนี (n)	ตัวถูกถอดกรณฑ์ (a)
ตัวอย่าง	$\sqrt[4]{34}$	รากที่ 4 ของ 34	4	34
1	$\sqrt[5]{-32}$			
2	$\sqrt[3]{18}$			
3	$\sqrt{23}$			
4	$\sqrt[7]{-123}$			
5	$\sqrt[8]{256}$			
6	$\sqrt[11]{-1}$			
7	$\sqrt[6]{55}$			
8	$\sqrt[3]{3x^3y}$			
9	$\sqrt{4xy^2z^4}$			
10	$\sqrt[5]{-123,454,321}$			
11	$\sqrt[5]{-0.00001}$			
12	$\sqrt{4x^2}$			
13	$\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$			
14	$\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$			
15	$\sqrt[5]{-\frac{32x^{10}}{125y^5}}$			

3.4 การเปรียบเทียบค่ายกกำลังของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 87. จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากค่ามากไปหาค่าน้อย $1,000^{1,000}$, $100^{10,000}$, $10^{100,000}$

วิธีทำ

$$\text{พิจารณา } 1,000^{1,000} = (10^3)^{1,000} = 10^{3,000}$$

$$100^{10,000} = (10^2)^{10,000} = 10^{20,000}$$

$$10^{100,000} = 10^{100,000}$$

นั่นคือ $10^{100,000} > 10^{20,000} > 10^{3,000}$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากค่ามากไปหาค่าน้อย จะได้ $10^{100,000}$, $100^{10,000}$, $1,000^{1,000}$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 88. จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากค่ามากไปหาค่าน้อย 2^{3^4} , 2^{4^3} , 4^{2^3} และ 4^{3^2}

วิธีทำ

$$\text{พิจารณา } 2^{3^4} = 2^{(3^4)} = 2^{(3 \times 3 \times 3 \times 3)} = 2^{81}$$

$$2^{4^3} = 2^{(4^3)} = 2^{(4 \times 4 \times 4)} = 2^{64}$$

$$4^{2^3} = 4^{(2^3)} = 4^{(2 \times 2 \times 2)} = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$$

$$4^{3^2} = 4^{(3 \times 3)} = 4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$$

นั่นคือ $2^{81} > 2^{64} > 2^{18} > 2^{16}$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากค่ามากไปหาค่าน้อย จะได้ 2^{3^4} , 2^{4^3} , 4^{3^2} และ 4^{2^3} ตามลำดับ

ตัวอย่าง 89. กำหนด $x = 512$ จงหาค่าของ $x^{\frac{26}{81}} \left[x \left(x \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad x^{\frac{26}{81}} \left[x \left(x \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{26}{81}} \left[x \left(x \left(x^{\frac{1}{9}} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{26}{81}} \left[x \left(x \cdot x^{\frac{1}{9}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{26}{81}} \left[x \left(x^{\frac{10}{9}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{26}{81}} \left[x \left(x^{\frac{10}{27}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{26}{81}} \left[x \cdot x^{\frac{10}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{26}{81}} \left(x^{\frac{37}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{26}{81}} \cdot x^{\frac{37}{81}} \\ &= x^{\frac{63}{81}} \\ &= x^{\frac{7}{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } x = 512 \text{ จะได้} &= (512)^{\frac{7}{9}} \\ &= (2^9)^{\frac{7}{9}} \\ &= 2^7 \\ &= 128 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 90. ให้ $a \in \mathbb{Z}^+$ และ $x, y \in \mathbb{Q}$ ถ้า $a^x = a^y$ แล้ว $x = y$

ตัวอย่าง 91. กำหนด $64^{-x} = 8$ จงหาค่าของ 2^{4x}

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก } 64^{-x} = 8 \text{ จะได้} &2^{-6x} = 2^3 \\ \text{ดังนั้น} &-6x = 3 \\ &x = -\frac{1}{2} \\ \text{แทนค่า } x = -\frac{1}{2} \text{ ใน} &2^{4x} = 2^{4(-\frac{1}{2})} \\ &= 2^{-2} \\ &= \frac{1}{2^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 92. กำหนด $8^{\frac{x}{2}} = 5$ จงหาค่าของ 2^{3x}

วิธีทำ จาก $8^{\frac{x}{2}} = 5$ จะได้ $2^{\frac{3x}{2}} = 5$
 และจาก $2^{3x} = \left(2^{\frac{3x}{2}}\right)^2$
 $= 5^2$
 $= 25$
 ดังนั้น $2^{3x} = 25$

ตัวอย่าง 93. กำหนด $64^{\frac{x}{4}} = 3$ จงหาค่าของ 4^{-3x}

วิธีทำ จาก $64^{\frac{x}{4}} = 3$ จะได้ $4^{\frac{3x}{4}} = 3$
 และจาก $4^{3x} = \left(4^{\frac{3x}{4}}\right)^4$
 $= 3^4$
 จาก $4^{-3x} = \frac{1}{4^{3x}}$
 $= \frac{1}{\left(4^{\frac{3x}{4}}\right)^4}$
 $= \frac{1}{3^4}$
 $= \frac{1}{81}$
 ดังนั้น $4^{-3x} = \frac{1}{81}$

ตัวอย่าง 94. กำหนด $(16)^{-x} = 128$ จงหาค่าของ $2^{\frac{4x}{7}}$

วิธีทำ จาก $(16)^{-x} = 128$ จะได้ $2^{-4x} = 2^7$
 ดังนั้น $-4x = 7$
 $x = \frac{-7}{4}$
 จะได้ว่า $2^{\frac{4x}{7}} = 2^{\left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{-7}{4}\right)}$
 $= 2^{-1}$
 $= \frac{1}{2}$
 ดังนั้น $2^{\frac{4x}{7}} = \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 95. กำหนด $(32)^x = 243$ จงหาค่าของ 2^{4x}

วิธีทำ จาก $(32)^x = 243$ จะได้ $2^{5x} = 3^5$
 นำ $\frac{4}{5}$ คูณเลขยกกำลังทั้งสองข้าง จะได้ $(2^{5x})^{\frac{4}{5}} = (3^5)^{\frac{4}{5}}$
 $2^{4x} = 3^4$
 $= 81$
 ดังนั้น $2^{4x} = 81$

3.5 แบบฝึกหัดที่ 1.6

คำสั่ง จงตอบคำถามตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $(64)^{-x} = 32$ จงหาค่าของ $2^{(\frac{5x}{6})}$

.....

2. กำหนดให้ $(27)^{-x} = 81$ จงหาค่าของ $9^{(\frac{-3x}{8})}$

.....

3. กำหนดให้ $(32)^{\frac{x}{2}} = 5$ จงหาค่าของ 2^{5x}

.....

4. กำหนดให้ $(16)^{\frac{x}{3}} = 5$ จงหาค่าของ 2^{-4x}

.....

5. กำหนดให้ $(81)^{\frac{x}{3}} = 2$ จงหาค่าของ $5 \cdot 3^{4x}$

.....

6. กำหนดให้ $(125)^{\frac{x}{2}} = 4$ จงหาค่าของ $2 \cdot 25^{\frac{3x}{2}}$

.....

7. กำหนดให้ $(16)^x = 81$ จงหาค่าของ 2^{3x}

.....

8. กำหนดให้ $(125)^x = 64$ จงหาค่าของ 5^{2x}

.....

9. กำหนดให้ $(36)^{2x} = 81$ จงหาค่าของ $2 \cdot 6^{3x}$

.....

10. กำหนดให้ $(49)^{3x} = 8^2$ จงหาค่าของ $3 \cdot 7^{5x} + 1$

.....

ตัวอย่าง 96. กำหนด $(-2)^{2x} = \frac{1}{9}$ จงหาค่าของ 4^{-2x}

วิธีทำ จาก $(-2)^{2x} = \frac{1}{9}$ จะได้ $(-2^2)^x = 9^{-1}$
 ดังนั้น $4^x = 9^{-1}$
 $4^{-2x} = (4^x)^{-2}$
 $= (9^{-1})^{-2}$
 $= 9^2$
 $= 81$

ดังนั้น $4^{-2x} = 81$

พิจารณาสูตรผลต่างกำลังสอง(different square); $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

และ $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, m, n \in \mathbb{Z}, (a^m)^n = a^{mn}$

จะได้ว่า $(1 - x^{\frac{1}{n}})(1 + x^{\frac{1}{n}}) = (1^2 - x^{\frac{1}{n} \cdot 2})$
 $= (1 - x^{\frac{2}{n}})$

นั่นคือ $(1 - x^{\frac{1}{n}})(1 + x^{\frac{1}{n}}) = (1 - x^{\frac{2}{n}}), x > 0, n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 97. กำหนด $x = 2$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $= [(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})] (1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$
 $= (1 - x^{\frac{2}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$
 $= [(1 - x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{4}})] (1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$
 $= (1 - x^{\frac{2}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$
 $= [(1 - x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{2}})] (1 + x)$
 $= (1 - x^{\frac{2}{2}})(1 + x)$
 $= (1 - x)(1 + x)$
 $= (1 - x^2)$
 $= (1 - 2^2)$
 $= (1 - 4)$
 $= -3$

ดังนั้น เมื่อ $x = 2$ จะได้ว่า $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x) = -3$

3.6 แบบฝึกหัดที่ 1.7

1.7-1 คำสั่ง จงตอบคำถามตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $(-3)^{2x} = \frac{1}{5}$ จงหาค่าของ 9^{-3x}

.....

3. กำหนดให้ $(-5)^{2x} = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ 25^{-4x}

.....

2. กำหนดให้ $(-4)^{6x} = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ 16^{-9x}

.....

4. กำหนดให้ $(-9)^{4x} = \frac{1}{5}$ จงหาค่าของ 81^{-4x}

.....

1.7-2 คำสั่ง จงตอบคำถามตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนด $x = 3$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

.....

2. กำหนด $x = 4$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

.....

3. กำหนด $x = 5$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{32}})(1 + x^{\frac{1}{32}})(1 + x^{\frac{1}{16}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

.....

พิจารณาต่อไปนี้ ถ้า $a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$

$$\text{จาก } \left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{n}}\right) = \left(1 - a^{\frac{2}{n}}\right)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} & \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \dots \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \dots \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{2}{2^{(n-1)}}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \dots \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \dots \left(1 - a^{\left(\frac{2}{2^{(n-2)}}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \dots \left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^{(n-3)}}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{2}{2^2}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{2}{2^1}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right) \\ &= \left(1 + a^{\left(\frac{1}{1}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{1}\right)}\right) \\ &= (1 + a)(1 - a) \\ &= (1 - a^2) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \dots \left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1 + a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)\left(1 - a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right) = (1 - a^2)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\text{จะได้ว่า } \left(a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)} + 1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)} + 1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)} + 1\right) \dots \left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)} + 1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)} + 1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)} - 1\right) = (a^2 - 1)$$

ตัวอย่าง 98. $(1 + 7)\left(1 + 7^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + 7^{\frac{1}{4}}\right) \dots \left(1 + 7^{\frac{1}{128}}\right)\left(1 - 7^{\frac{1}{128}}\right) = (1 - 7^2) = 1 - 49 = -48$

ตัวอย่าง 99. $(7 + 1)\left(7^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(7^{\frac{1}{4}} + 1\right) \dots \left(7^{\frac{1}{128}} + 1\right)\left(7^{\frac{1}{128}} - 1\right) = (7^2 - 1) = 49 - 1 = 48$

3.7 สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง

$\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ ที่ $n > 1$ และ $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ จะได้ว่า

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง
2. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 11 สำหรับ $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a}$ เป็น $\begin{cases} \text{รากคี่} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \text{รากคู่} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$

- ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากคี่ แล้ว $a \in \mathbb{R}$ (a เป็นได้ทั้งจำนวนจริงลบ หรือ 0 หรือ จำนวนจริงบวก)
- ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากคู่ แล้ว $a \in \mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ ($a \geq 0$ เท่านั้น และ a ต้องไม่ติดลบ)

3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$
7. $\sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = (a^{\frac{m}{n}})(b^{\frac{m}{n}}) = (ab)^{\frac{m}{n}}$
8. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

ตัวอย่าง 100. $(\sqrt[3]{6})^3 = 6$

ตัวอย่าง 101. $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$

ตัวอย่าง 102. $(\sqrt[7]{-16})^7 = -16$

ตัวอย่าง 103. $\left(\sqrt[6]{\frac{3}{7}}\right)^6 = \frac{3}{7}$

ตัวอย่าง 104. $\left(\sqrt[7]{-\frac{2}{5}}\right)^7 = -\frac{2}{5}$

ตัวอย่าง 105. $\sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} = 3^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}}$

ตัวอย่าง 106. $\sqrt[5]{-6 \times 3} = \sqrt[5]{-6} \times \sqrt[5]{3} = (-6)^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}$

ตัวอย่าง 107. $\sqrt[5]{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$

ตัวอย่าง 108. $\sqrt[3]{(4 \times 5)^2} = \sqrt[3]{4^2 \times 5^2} = \sqrt[3]{4^2} \times \sqrt[3]{5^2} = 4^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$

ตัวอย่าง 109. $\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}}}$

ตัวอย่าง 110. $\sqrt[6]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{6}}}$

ตัวอย่าง 111. $\sqrt[5]{-\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt[5]{-2}}{\sqrt[5]{9}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-9}} = \frac{2^{\frac{1}{5}}}{(-9)^{\frac{1}{5}}} = \frac{(-2)^{\frac{1}{5}}}{9^{\frac{1}{5}}}$

ตัวอย่าง 112. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{2^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{4}{5}}}$

ตัวอย่าง 113. $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$

นักเรียนควรทราบ 12 สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 13 สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 14 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

ตัวอย่าง 114. $\sqrt{6^2} = |6| = 6$

ตัวอย่าง 115. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

ตัวอย่าง 116. $\sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$

ตัวอย่าง 117. $\sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^4} = \left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$

ตัวอย่าง 118. $\sqrt[5]{\left(-\frac{3}{5}\right)^5} = -\frac{5}{3}$

ตัวอย่าง 119. $\sqrt[8]{\left(-\frac{2}{3}\right)^8} = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

ตัวอย่าง 120. $\sqrt[4]{\left(-\frac{3x^2}{5}\right)^4} = \left|-\frac{3x^2}{5}\right| = \frac{3x^2}{5}$

ตัวอย่าง 121. กำหนดให้ $x < -5$ แล้ว $|x| = -x$ (ตามนิยาม)

ตัวอย่าง 122. กำหนดให้ $x \geq 0$ แล้ว $|x| = x$ (ตามนิยาม)

3.8 แบบฝึกหัดที่ 1.8

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่าง $(\sqrt[3]{-2})^3 = \left((-2)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (-2)^{\frac{3}{3}} = (-2)^1 = -2$

1. $(\sqrt[8]{18})^8$
2. $(\sqrt{4})^2$
3. $(\sqrt[3]{3})^3$
4. $(\sqrt[3]{-5})^3$
5. $(\sqrt[3]{-5a})^3$
6. $(\sqrt{56})^2$
7. $(\sqrt[7]{-45})^7$
8. $(\sqrt[3]{-abc})^3$
9. $(\sqrt[6]{a+b})^6$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}^+$
10. $(\sqrt{a-b})^2$ เมื่อ $a-b \geq 0$
11. $(\sqrt[4]{3x^2})^4$
12. $(\sqrt[5]{-4x^2y^5})^5$
13. $(\sqrt{0.121})^2$
14. $(\sqrt{1.44})^2$
15. $(\sqrt[5]{-2.43})^5$
16. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$
17. $\left(\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}\right)^3$
18. $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{11}}\right)^5$
19. $\left(\sqrt[5]{\frac{3x+1}{2}}\right)^5$
20. $\left(\sqrt[4]{\frac{x-1}{1-x}}\right)^4$ เมื่อ $x \neq 1$

3.9 แบบฝึกหัดที่ 1.9

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลคูณของเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $\sqrt{3x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

ตัวอย่าง $\sqrt[3]{3x \times 4} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{4} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$

1. $\sqrt[3]{4 \times 6} = \dots\dots\dots$
2. $\sqrt[3]{9 \times (-3)} = \dots\dots\dots$
3. $\sqrt{4 \times 7} = \dots\dots\dots$
4. $\sqrt{4(x+2)} = \dots\dots\dots$
5. $\sqrt{(x-3)(x+3)} = \dots\dots\dots$
6. $\sqrt{(2x-1)(x+5)^3} = \dots\dots\dots$
7. $\sqrt[5]{(-3) \times (-4)} = \dots\dots\dots$
8. $\sqrt[6]{xy^2z^3} = \dots\dots\dots$
9. $\sqrt[4]{16a^4b^4} = \dots\dots\dots$
10. $\sqrt[4]{256a^8b^{12}} = \dots\dots\dots$
11. $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)} = \dots\dots\dots$
12. $\sqrt[5]{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{y}{5}\right)} = \dots\dots\dots$
13. $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} = \dots\dots\dots$
14. $\sqrt[4]{\left(\frac{1-x}{8}\right) \cdot \left(\frac{2+x}{3}\right)} = \dots\dots\dots$
15. $\sqrt[3]{\left(\frac{-2a}{3}\right) \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)} = \dots\dots\dots$
16. $\sqrt[3]{\left(\frac{(-2a)^3}{3b^2}\right) \cdot \left(\frac{2b^2}{3a^3}\right)}, \text{ เมื่อ } a, b \neq 0; = \dots\dots\dots$
17. $\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-1)^3}{(1-3b)^2}\right) \cdot \left(-\frac{3b^2}{2a^3}\right)}, \text{ เมื่อ } a \neq 0; = \dots\dots\dots$

3.10 แบบฝึกหัดที่ 1.10**1.10-1 คำสั่ง** จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลหารของเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

1. $\sqrt{\frac{2}{5}}$

2. $\sqrt[3]{-\frac{3}{8}}$

3. $\sqrt[4]{\frac{2-x}{5x}}$ เมื่อ $0 < x < 2$

4. $\sqrt{\frac{2a^2}{3}}$

5. $\sqrt[3]{\frac{2-a^3}{4}}$

1.10-2 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่าง $\sqrt{2^2} = |2| = 2$

ตัวอย่าง $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

1. $\sqrt[3]{(-5)^3}$

2. $\sqrt[4]{(-6)^4}$

3. $\sqrt{(2x)^2}$

4. $\sqrt{(2x^2)^2}$

5. $\sqrt{6^2}$

6. $\sqrt{(-6)^2}$

7. $\sqrt{(x+y)^2}$

8. $\sqrt[5]{(x+y)^5}$

9. $\sqrt[4]{(x^4-y^4)^4}$

10. $\sqrt{((-a)b(-c))^2}$

11. $\sqrt{(2x-\sqrt{y})^2}$

12. $\sqrt[8]{\left(\sqrt{2x-\sqrt{y}}\right)^8}$

3.11 ตัวอย่างกรณีที่นักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนควรสังเกตว่า

1. พิจารณา

นักเรียนควรทราบ 15 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

นักเรียนควรทราบ 16 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{(-a) \cdot (-b)} \neq \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$

$$\sqrt{(-3) \cdot (-2)} = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \text{ แต่ } \sqrt{(-3) \cdot (-2)} \neq \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2}$$

เพราะว่า ตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ในรากคู่ห้ามติดลบ

ตัวอย่าง 123. $\sqrt{(-2) \cdot (-4)} \neq \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-4}$

ตัวอย่าง 124. $\sqrt[4]{(-3) \cdot (-5)} \neq \sqrt[4]{-3} \cdot \sqrt[4]{-5}$

2. **นักเรียนควรทราบ 17** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$

ตัวอย่าง 125. $\sqrt[3]{(-2) \cdot (-4)} = \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$

ตัวอย่าง 126. $\sqrt[5]{(-3) \cdot (-4)} = \sqrt[5]{-3} \cdot \sqrt[5]{-4}$

ตัวอย่าง 127. $\sqrt[7]{(-1) \cdot (-2)} = \sqrt[7]{-1} \cdot \sqrt[7]{-2}$

3. จากกรอบ **นักเรียนควรทราบ 14** เราทราบว่า

สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

ตัวอย่าง 128. $\sqrt{2+4} \neq \sqrt{2} + \sqrt{4}$

ตัวอย่าง 129. $\sqrt[3]{5+4} \neq \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}$

ตัวอย่าง 130. $\sqrt[4]{4-3} \neq \sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{3}$

4. **นักเรียนควรทราบ 18** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^n = (b-a)^n$

ตัวอย่าง 131. $(4-2)^2 = 2^2 = 4 = (-2)^2 = (2-4)^2$

ตัวอย่าง 132. $(2-1)^4 = 1^4 = 1 = (-1)^4 = (1-2)^4$

ตัวอย่าง 133. $(x-y)^6 = (y-x)^6$

5. **นักเรียนควรทราบ 19** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^n \neq (b-a)^n$

ตัวอย่าง 134. $(4-2)^3 = 2^3 = 8 \neq -8 = (-2)^3 = (2-4)^3$

ตัวอย่าง 135. $(2-1)^5 = 1^5 = 1 \neq -1 = (-1)^5 = (1-2)^5$

ตัวอย่าง 136. $(x - y)^7 \neq (y - x)^7$

6. **นักเรียนควรทราบ 20** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a - b)^{\text{คี่}} = -(b - a)^{\text{คี่}}$

ตัวอย่าง 137. $(4 - 2)^3 = 2^3 = 8 = -(-8) = -(-2)^3 = -(2 - 4)^3$

ตัวอย่าง 138. $(2 - 1)^5 = 1^5 = 1 = -(-1) = -(-1)^5 = -(1 - 2)^5$

ตัวอย่าง 139. $(x - y)^7 = -(y - x)^7$

7. **นักเรียนควรทราบ 21** สำหรับ $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m$

ตัวอย่าง 140. $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{4 \times 3} = (2^3)^4$

ตัวอย่าง 141. $((-2)^3)^4 = (-2)^{3 \times 4} = (-2)^{4 \times 3} = ((-2)^3)^4$

3.12 การถอดกรณฑ์ที่ n

ตัวอย่าง 142. จงหาค่าของ $\sqrt{8}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sqrt{8} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2} \\ &= \sqrt{2^2 \times 2} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= |2| \cdot \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 143. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{-27x^6}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-27x^6} &= \sqrt[3]{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2} \\ &= \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot (x^2)^3} \\ &= \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{(x^2)^3} \\ &= -3x^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 144. จงหาค่าของ $\sqrt[4]{32x^7}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sqrt[4]{32x^7} &= \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x^4 \cdot x^3} \\ &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 2 \cdot x^4 \cdot x^3} \\ &= |2| \cdot \sqrt[4]{2} \cdot |x| \cdot \sqrt[4]{x^3} \\ &= 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot |x| \cdot \sqrt[4]{x^3} \\ &= 2 \cdot |x| \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x^3} \\ &= 2|x| \cdot \sqrt[4]{2x^3} \\ &= 2|x| \sqrt[4]{2x^3} \end{aligned}$$

3.13 กรณที่ที่เหมือนกัน

นิยาม 145. สำหรับ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะเรียก $\sqrt[n]{\blacksquare}$ ว่า กรณที่ที่ n ของ \blacksquare

- สำหรับ $k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $k\sqrt[n]{\blacksquare}$ เรียก k ว่า สัมประสิทธิ์
- เรียก n ว่า อันดับของกรณที่
- เรียก \blacksquare ว่า ตัวที่ถูกถอดกรณที่

นิยาม 146. กรณที่ที่เหมือนกัน หมายถึง

1. กรณที่ที่มีอันดับของกรณที่เป็นอันดับเดียวกัน และ
2. มีจำนวนที่ถูกถอดกรณที่เป็นจำนวนเดียวกัน และ
3. มีสัมประสิทธิ์เหมือนหรือต่างกันได้

ตัวอย่าง 147. กรณที่อันดับสองที่เหมือนกัน เช่น $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $1.34\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 148. กรณที่อันดับสามที่เหมือนกัน เช่น $2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $-3\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$, $1.34\sqrt[3]{2}$

ตัวอย่าง 149. กรณที่ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt[3]{3}$ เพราะ อันดับของกรณที่และตัวที่ถูกถอดกรณที่ต่างกัน

ตัวอย่าง 150. กรณที่ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt[3]{4}$ เพราะ อันดับของกรณที่ต่างกัน

ตัวอย่าง 151. กรณที่ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt{3}$ เพราะ ตัวที่ถูกถอดกรณที่ต่างกัน

3.14 แบบฝึกหัดที่ 1.11

1.11-1 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่าง $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = |2| \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

1. $\sqrt{18}$
2. $\sqrt{1000}$
3. $\sqrt{20x^2}$
4. $\sqrt{40x^3y^4}$
5. $\sqrt[3]{135}$
6. $\sqrt[3]{-16x^3y^5}$
7. $\sqrt[3]{\frac{-64x^7y^2}{27}}$

8. $\sqrt[4]{128x^6}$

9. $\sqrt[4]{(x-y)^4}$

10. $\sqrt[4]{(x^4-y^4)^8}$

จากแบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 9 และ 10 จะพบว่า $|a-b| = |b-a|$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$

1.11-2 คำสั่ง จงระบุว่าการกรณฑ์ของจำนวนต่อไปนี้ เหมือนกัน หรือ ต่างกัน พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

ตัวอย่าง $\sqrt{3}$ กับ $\sqrt[3]{2}$ เป็นกรณฑ์ที่ต่างกัน เพราะ อันดับของกรณฑ์และตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt[3]{2}$ เพราะ อันดับของกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง $\sqrt[5]{3}$ กับ $6\sqrt[5]{3}$ เป็นกรณฑ์ที่เหมือนกัน เพราะ อันดับของกรณฑ์และตัวที่ถูกถอดกรณฑ์เหมือนกัน

1. $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt[3]{2}$

2. $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-7}$ กับ $0.001\sqrt[7]{-7}$

3. $2\sqrt[3]{3}$ กับ $3\sqrt[3]{2}$

4. $\sqrt[4]{2}$ กับ $x\sqrt[4]{2}$

5. $3\sqrt[3]{4}$ กับ $3\sqrt[4]{3}$

6. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{2}$ กับ $5\sqrt[4]{9}$

7. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}$ กับ $\frac{5}{4}\sqrt[4]{2}$

8. $\frac{2}{7}(x-y)\sqrt[3]{x+y}$ กับ $\frac{7}{2}(y-x)\sqrt[3]{y+x}$

9. $3\sqrt[5]{ax^2+bx+c}$ กับ $-3\sqrt[4]{x}$ เมื่อ $x \geq 0$

10. $\sqrt[3]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ กับ $\sqrt[3]{\frac{-b \pm \sqrt{-4ac+b^2}}{2a}}$ เมื่อ $a \geq 0$

3.15 การบวก ลบ จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

หลักการ 152. พิจารณาดังนี้

1. จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สามารถนำมา บวก ลบกันได้ ต้องเป็นกรณฑ์ที่เหมือนกันเท่านั้น
2. การบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน ทำได้โดย การนำเอาสัมประสิทธิ์ของกรณฑ์แต่ละจำนวนมาดำเนินการบวก ลบกันตามปกติ
3. จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่ต่างกัน นำมา บวก ลบกันไม่ได้

สำหรับการบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน มีหลักการดังนี้

$$k_1 \sqrt[n]{a} + k_2 \sqrt[n]{a} = (k_1 + k_2) \sqrt[n]{a} \quad \text{และ} \quad k_1 \sqrt[n]{a} - k_2 \sqrt[n]{a} = (k_1 - k_2) \sqrt[n]{a}$$

เพิ่มเติม 1 $k_1 \sqrt[n]{a} + k_2 \sqrt[n]{a} + \dots + k_m \sqrt[n]{a} = (k_1 + k_2 + \dots + k_m) \sqrt[n]{a} = \sum_{i=1}^m k_i \sqrt[n]{a}$ และ

เพิ่มเติม 2 $k_1 \sqrt[n]{a} - k_2 \sqrt[n]{a} - \dots - k_m \sqrt[n]{a} = (k_1 - k_2 - \dots - k_m) \sqrt[n]{a}$

ตัวอย่าง 153. ผลลัพธ์ของ $2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (2 + 1 - 4)\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 154. ผลลัพธ์ของ $\frac{2}{4}\sqrt[3]{-5} + \frac{3}{6}\sqrt[3]{-5} - \frac{4}{8}\sqrt[3]{-5} = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{8}\right)\sqrt[3]{-5} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}$

ตัวอย่าง 155. จงหาผลลัพธ์ของ $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{27}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{27} &= \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} \\ &= \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3} \\ &= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= (5 + 4 - 2)\sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 156. จงหาผลลัพธ์ของ $(2a + b)\sqrt{2} - (a - 2b)\sqrt{2}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} (2a + b)\sqrt{2} - (a - 2b)\sqrt{2} &= [(2a + b) - (a - 2b)]\sqrt{2} \\ &= (2a + b - a + 2b)\sqrt{2} \\ &= (a + 3b)\sqrt{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 157. จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{x}{\sqrt{5}} - \sqrt{20}x + \frac{2x}{\sqrt{5}}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{5}} - \sqrt{20}x + \frac{2x}{\sqrt{5}} &= \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{4 \cdot 5}x + \left(\frac{2x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{x\sqrt{5}}{5} - 2x\sqrt{5} + \frac{2x\sqrt{5}}{5} \\ &= \left(\frac{x}{5} - 2x + \frac{2x}{5}\right)\sqrt{5} \\ &= \left(\frac{x}{5} - \frac{10x}{5} + \frac{2x}{5}\right)\sqrt{5} \\ &= \left(\frac{x - 10x + 2x}{5}\right)\sqrt{5} \\ &= -\frac{7\sqrt{5}}{5}x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 158. จงหาผลลัพท์ของ $2\sqrt{\frac{1}{10}} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{10}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad 2\sqrt{\frac{1}{10}} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{10} &= 2\sqrt{\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10}} - 4\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\
 &= 2\sqrt{\frac{10}{10^2}} - 4\sqrt{\frac{10}{2^2}} + 3\sqrt{\frac{10}{5^2}} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\
 &= \frac{2}{10}\sqrt{10} - \frac{4}{2}\sqrt{10} + \frac{3}{5}\sqrt{10} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\
 &= \left(\frac{2}{10} - \frac{4}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{10} \\
 &= \left(\frac{1}{5} - 2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{10} \\
 &= \left(\frac{1}{5} - \frac{10}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{10} \\
 &= \left(\frac{1 - 10 + 3 + 1}{5}\right)\sqrt{10} \\
 &= -\frac{5}{5}\sqrt{10} \\
 &= -\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 159. จงหาผลลัพท์ของ $\sqrt[3]{192} + \sqrt{98} - \sqrt[3]{24} - \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \sqrt[3]{192} + \sqrt{98} - \sqrt[3]{24} - \sqrt{18} &= \sqrt{98} - \sqrt{18} + \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{24} \\
 &= \sqrt{49 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt[3]{64 \cdot 3} - \sqrt[3]{8 \cdot 3} \\
 &= \sqrt{7^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} \\
 &= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} \\
 &= (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) + (4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3}) \\
 &= (7 - 3)\sqrt{2} + (4 - 2)\sqrt[3]{3} \\
 &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} \\
 &= 2(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})
 \end{aligned}$$

3.16 แบบฝึกหัดที่ 1.12

1.12-1 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$
2. $\sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{8}$
3. $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$
4. $\sqrt{75} + \sqrt{108} - 7\sqrt{3}$
5. $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{192}$
6. $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{256}$
7. $\sqrt{9x^3} + \sqrt{16x^4} + \sqrt{x^7}$
8. $4\sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{242}$
9. $2a\sqrt{\frac{5}{a}} - 5\sqrt{5a} + 5\sqrt{\frac{a}{5}}$
10. $3b\sqrt{\frac{7}{b}} - 7\sqrt{7b} + 7\sqrt{\frac{b}{7}}$
11. $4c\sqrt{\frac{11}{c}} - 11\sqrt{11c} + 11\sqrt{\frac{c}{11}}$
12. $(\sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50})^2$
13. $(\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50})^2$
14. $(\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50})^2$
15. $(\sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50})^2$
16. $\left(4c\sqrt{\frac{11}{c}} - 11\sqrt{11c} + 11\sqrt{\frac{c}{11}}\right)^2$
17. $\left(3b\sqrt{\frac{7}{b}} - 7\sqrt{7b} + 7\sqrt{\frac{b}{7}}\right)^4$
18. $\left(2a\sqrt{\frac{5}{a}} - 5\sqrt{5a} + 5\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^6$
19. $(\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{192})^3$
20. $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{16})^3$

การคูณ หาร **กรณีที่เหมือนกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1 \sqrt[n]{a} \cdot k_2 \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot k_m \sqrt[n]{a} = \prod_{i=1}^m k_i (\sqrt[n]{a})^m = \prod_{i=1}^m k_i \sqrt[n]{a^m} \quad \text{และ} \quad \frac{k_1 \sqrt[n]{a}}{k_2 \sqrt[n]{a}} = \frac{k_1}{k_2}$$

การคูณ หาร **กรณีที่มีเลขดัชนีเหมือนกันแต่มีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1 \sqrt[n]{a} \cdot k_2 \sqrt[n]{b} = k_1 k_2 \cdot \sqrt[n]{ab} \quad \text{และ} \quad \frac{k_1 \sqrt[n]{a}}{k_2 \sqrt[n]{b}} = \frac{k_1 \sqrt[n]{a}}{k_2 \sqrt[n]{b}} = \frac{k_1}{k_2} \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

เพิ่มเติม 3 $k_1 \sqrt[n]{a_1} \cdot k_2 \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot k_m \sqrt[n]{a_m} = k_1 k_2 \cdot \dots \cdot k_m \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_m} = \prod_{i=1}^m k_i \sqrt[n]{\prod_{j=1}^m a_j}$

การคูณ หาร **กรณีที่มีเลขดัชนีต่างกันแต่มีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์เหมือนกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1 \sqrt[n]{a} \cdot k_2 \sqrt[m]{a} = k_1 a^{(\frac{1}{m})} \cdot k_2 a^{(\frac{1}{n})} = k_1 k_2 \cdot \left(a^{(\frac{1}{m})} \cdot a^{(\frac{1}{n})} \right) = k_1 k_2 a^{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}$$

เพิ่มเติม 4 $(k_1 \sqrt[n_1]{a})(k_2 \sqrt[n_2]{a}) \dots (k_m \sqrt[n_m]{a}) = k_1 k_2 \dots k_m a^{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_m})} = \prod_{i=1}^m k_i \cdot a^{\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \right)}$

และ $\frac{k_1 \sqrt[n]{a}}{k_2 \sqrt[m]{a}} = \frac{k_1 a^{\frac{1}{m}}}{k_2 a^{\frac{1}{n}}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot a^{(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})}$

การคูณ หาร **กรณีที่มีเลขดัชนีต่างกันและมีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน** ทำไม่ได้

1.12-2 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $3a\sqrt{\frac{3}{a}} + 3\sqrt{3a} - 3\sqrt{\frac{a}{3}}$
2. $4a\sqrt{\frac{7}{a}} - 7\sqrt{7a} + 7\sqrt{\frac{a}{7}}$
3. $5a\sqrt{\frac{2}{a}} - 2\sqrt{2a} - 2\sqrt{\frac{a}{2}}$
4. $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{4} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{6}$
5. $\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{3} \cdot 3\sqrt[3]{4} \cdot 4\sqrt[3]{5} \cdot 5\sqrt[3]{6}$
6. $\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{6} \cdot (-4\sqrt{7}) \cdot 5\sqrt{8}$
7. $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt[3]{3} \cdot 3\sqrt[4]{4} \cdot 4\sqrt[5]{5} \cdot 5\sqrt[6]{6}$
8. $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$
9. $3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 160. $2\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{10}) = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{3 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 10} = 2\sqrt{15} + 2\sqrt{30}$

ตัวอย่าง 161. $4\sqrt{5}(2\sqrt{10} - 3\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} - 4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 8\sqrt{50} - 12\sqrt{50} = -4\sqrt{50} = -20\sqrt{2}$

1.12-3 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $3\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{50})$
2. $\sqrt{18}(7\sqrt{2} - \sqrt{32})$
3. $-\sqrt{72}(9\sqrt{2} + 4\sqrt{50})$
4. $4\sqrt[3]{5}(3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3})$
5. $-2\sqrt[3]{6}(-7\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{5})$
6. $3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}} \right)$
7. $-5\sqrt{2} \left(\frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}} \right)$

4 เฉพาะรากที่สอง

นิยาม 162. ถ้า $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว y เป็นรากที่สอง(square root) ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

ทฤษฎีบท 163. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$

ข้อสังเกต 164. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $\pm\sqrt{x^2} = \pm x$

ข้อสังเกต 165. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $+\sqrt{x^2} = x$

ข้อสังเกต 166. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $-\sqrt{x^2} = -x$

ข้อสังเกต 167. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$ (ตามทฤษฎี)

ข้อสังเกต 168. ถ้า $x < 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = -x$

ทฤษฎีบท 169. ถ้า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

ทฤษฎีบท 170. ถ้า $x \geq 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

ข้อสังเกต 171. ถ้า $x \geq 0$ จะได้ว่า $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ข้อสังเกต 172. $\sqrt{0} = 0$ และ $\sqrt{1} = 1$

ข้อสังเกต 173. $\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2} = |x-y| = |y-x|$

ข้อสังเกต 174. $\sqrt{\text{จำนวนจริงลบ}}$ ไม่มีราก(คำตอบ) ที่เป็นจำนวนจริง

4.1 การเขียนกรณฑ์ที่ n ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเศษส่วนโดยที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

ตัวอย่าง 175. จงเขียน $\sqrt{\frac{8}{11}}$ ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \sqrt{\frac{8}{11}} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \\ &= \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} \\ &= \frac{\sqrt{8 \cdot 11}}{\sqrt{11 \cdot 11}} \\ &= \frac{\sqrt{8 \cdot 11}}{\sqrt{11^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 11}}{\sqrt{11^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{22}}{11}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 176. จงเขียน $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} \\ &= \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{7^2}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{7}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 177. จงเขียน $\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \right) \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} \\ &= \frac{5\sqrt{21}}{2 \cdot |7|} \\ &= \frac{5\sqrt{21}}{14}\end{aligned}$$

4.2 แบบฝึกหัดที่ 1.13

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

3. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

4. $\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

5. $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

6. $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

7. $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

8. $\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

9. $\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

10. $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

11. $\frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{12}}$

12. $\frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

13. $\frac{-20\sqrt{18}}{3\sqrt{75}}$

14. $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48}}{-3\sqrt{2}}$

15. $\frac{6\sqrt{5} + \sqrt{125} - \sqrt{80}}{4\sqrt{7}}$

16. $\frac{9\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 2\sqrt{54}}{7\sqrt{5}}$

4.3 ทบทวนการคูณรากที่สอง

4.3.1 การคูณแบบปกติ

พิจารณาผลคูณต่อไปนี้ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \text{จาก } (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= (x_1y_1 + x_1y_2 + \dots + x_1y_n) + (x_2y_1 + x_2y_2 + \dots + x_2y_n) + \dots + (x_ny_1 + x_ny_2 + \dots + x_ny_n) \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i \leq n}} x_iy_j \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 178. จงทำ $(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3}) &= (2 \cdot 3) + (2 \cdot \sqrt{3}) + (3 \cdot \sqrt{2}) + (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) \\ &= 6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 3} \\ &= 6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 179. จงทำ $(3 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{6})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (3 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{6}) &= (3 \cdot 2) + (3 \cdot \sqrt{6}) - (2 \cdot \sqrt{5}) - (\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}) \\ &= 6 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5 \cdot 6} \\ &= 6 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{5} - \sqrt{30} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 180. จงทำ $(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{7})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{7}) &= (5 \cdot 5) - (5 \cdot \sqrt{7}) + (5 \cdot \sqrt{3}) - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}) \\ &= 25 - 5\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - \sqrt{3 \cdot 7} \\ &= 25 - 5\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - \sqrt{21} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 181. จงทำ $(2 - \sqrt{2})(5 - \sqrt{5})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (2 - \sqrt{2})(5 - \sqrt{5}) &= (2 \cdot 5) - (2 \cdot \sqrt{5}) + (5 \cdot \sqrt{2}) - (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}) \\ &= 10 - 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 5} \\ &= 10 - 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 182. จงทำ $(4 + \sqrt{50})(2 + \sqrt{54})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (4 + \sqrt{50})(2 + \sqrt{54}) &= (4 + 5\sqrt{2})(2 + 3\sqrt{6}) \\ &= (4 \cdot 2) + (4 \cdot 3\sqrt{6}) + (2 \cdot 5\sqrt{2}) + (5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}) \\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + (5 \cdot 3)\sqrt{2 \cdot 6} \\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + 15\sqrt{12} \\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + (15 \cdot 2)\sqrt{3} \\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + 30\sqrt{3} \\ &= 2(4 + 6\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 15\sqrt{3}) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 183. จงทำ $(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) &= (2 \cdot 3) + (2 \cdot \sqrt{2}) + (3 \cdot \sqrt{2}) + (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) \\ &= 6 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 2} \\ &= 6 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{4} \\ &= 6 + (2 + 3)\sqrt{2} + 2 \\ &= 8 + 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 184. จงทำ $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(3\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (2\sqrt{3} + \sqrt{2})(3\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= (2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) + (3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) + (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) \\ &= 6\sqrt{3 \cdot 3} + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 3\sqrt{3 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 2} \\ &= (6 \cdot \sqrt{9}) + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + \sqrt{4} \\ &= (6 \cdot 3) + (2 + 3)\sqrt{6} + 2 \\ &= 18 + 5\sqrt{6} + 2 \\ &= 20 + 5\sqrt{6} \\ &= 5(4 + \sqrt{6}) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 185. จงทำ $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{32})(3\sqrt{32} + 4\sqrt{75})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad (2\sqrt{8} + 3\sqrt{32})(3\sqrt{32} + 4\sqrt{75}) &= (2\sqrt{8} \cdot 3\sqrt{32}) + (2\sqrt{8} \cdot 4\sqrt{75}) + \\ &\quad (3\sqrt{32} \cdot 3\sqrt{32}) + (3\sqrt{32} \cdot 4\sqrt{75}) \\ &= (2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2}) + (2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3}) + \\ &\quad (3 \cdot \sqrt{32})^2 + (3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3}) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(\sqrt{2})^2) + (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 3}) + \\ &\quad (9 \cdot 32) + (3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 3}) \\ &= 96 + 80\sqrt{6} + 288 + 240\sqrt{6} \\ &= (96 + 288) + (80 + 240)\sqrt{6} \\ &= (96 + 288) + (80 + 240)\sqrt{6} \\ &= (384) + (320)\sqrt{6} \end{aligned}$$

4.4 แบบฝึกหัดที่ 1.14

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $(4 + \sqrt{2})(5 + \sqrt{3})$
2. $(3 + \sqrt{8})(10 + \sqrt{27})$
3. $(3 + \sqrt{24})(3 + \sqrt{45})$
4. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$
5. $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{6})$

6. $(\sqrt{32} + 3\sqrt{5})(5\sqrt{18} - \sqrt{50})$
7. $(9 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{2})$
8. $(9\sqrt{27} + \sqrt{3})(7\sqrt{20} - 3\sqrt{2})$
9. $(2\sqrt{5} + \sqrt{18})(4\sqrt{20} - 2\sqrt{2})$
10. $(2 + \sqrt{8})(12 - \sqrt{27})$
11. $(\sqrt{2} - \sqrt{8})(\sqrt{12} + \sqrt{27})$
12. $(3\sqrt{12} - 3\sqrt{32})(5\sqrt{12} + \sqrt{18})$
13. $(2\sqrt{27} - 5\sqrt{8})(2\sqrt{12} + 5\sqrt{18})$
14. $(3\sqrt{27} - 5\sqrt{75})(5\sqrt{27} + 3\sqrt{75})$
15. $(7\sqrt{28} - 2\sqrt{75})(3\sqrt{50} + 5\sqrt{18})$
16. $(\sqrt{3} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{10} - \sqrt{3})$
17. $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})(4\sqrt{5} - 5\sqrt{7})$
18. $(7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
19. $(5\sqrt{28} - 4\sqrt{50})(6\sqrt{32} - 9\sqrt{20})$
20. $(8\sqrt{8} - 27\sqrt{27})(3\sqrt{12} - 5\sqrt{50})$

4.4.1 การคูณโดยใช้สูตร

พิจารณาผลคูณต่อไปนี้ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$

1. จาก ผลต่างกำลังสอง (**different square**), $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

หรือ $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ และ $\forall x, y \geq 0$

จะได้ว่า $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$

2. จาก ผลต่างกำลังสาม, $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ และ $\forall x, y \geq 0$ จะได้ว่า

$(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((\sqrt{x})^2 + \sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 \right) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy})$

3. จาก ผลบวกกำลังสาม, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ และ $\forall x, y \geq 0$ จะได้ว่า

$(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left((\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 \right) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y - \sqrt{xy})$

4. กำลังสองสมบูรณ์ (**perfect square**), $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$ และ $\forall x, y \geq 0$

จะได้ว่า $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 \pm 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x \pm 2\sqrt{xy} + y = x + y \pm \sqrt{xy}$

จากกำลังสองสมบูรณ์ (*perfect square*) เราทราบว่า

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

และ

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

สังเกตสมการต่อไปนี้

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + y^2 + 2xy \tag{1}$$

ถ้าแทนค่า y ด้วย $y + z$ จะได้

$$(x + y)^2 = (x + (y + z))^2 = (x + (y + z))(x + (y + z)) = x^2 + (y + z)^2 + 2x(y + z)$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \tag{2}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าแทนค่า z ด้วย $z + w$ จะได้

$$(x + y + z + w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw \tag{3}$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \dots + 2\alpha_1\alpha_n + \\ &\quad 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4 + \dots + 2\alpha_2\alpha_n + \dots + \\ &\quad 2\alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)} + 2\alpha_{(n-2)}\alpha_n + \\ &\quad 2\alpha_{(n-1)}\alpha_n \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) + \\ &\quad (2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \dots + 2\alpha_1\alpha_n + \\ &\quad 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4 + \dots + 2\alpha_2\alpha_n + \\ &\quad \dots + \\ &\quad 2\alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)} + 2\alpha_{(n-2)}\alpha_n + 2\alpha_{(n-1)}\alpha_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_2\alpha_n + \\ &\quad \dots + \\ &\quad \alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)} + \alpha_{(n-2)}\alpha_n + \alpha_{(n-1)}\alpha_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\left((\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n) + \right. \\ &\quad \left. (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_2\alpha_n) + \right. \\ &\quad \dots + \\ &\quad \left. (\alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)} + \alpha_{(n-2)}\alpha_n) + \alpha_{(n-1)}\alpha_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\left(\sum_{j=2}^n \alpha_1\alpha_j + \sum_{k=3}^n \alpha_2\alpha_k + \dots + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=n-1}^n \alpha_{(n-2)}\alpha_l + \alpha_{(n-1)}\alpha_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \sum_{\substack{j,k \\ 1 \leq j < k}} \alpha_j\alpha_k \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \left(\sum_{j=2}^n \alpha_1 \alpha_j + \sum_{k=3}^n \alpha_2 \alpha_k + \dots + \sum_{l=n-1}^n \alpha_{(n-2)} \alpha_l + \alpha_{(n-1)} \alpha_n \right)$$

$$\text{หรือ } (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \sum_{\substack{j,k \\ 1 \leq j < k}} \alpha_j \alpha_k$$

ในทำนองเดียวกัน สังเกตสมการต่อไปนี้

$$(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 + y^2 - 2xy \tag{4}$$

ถ้าแทนค่า y ด้วย $y + z$ จะได้ $x - y = x - (y + z) = x - y - z$ ทำให้ได้ว่า

$$(x - y)^2 = (x - (y + z))^2 = (x - (y + z))(x - (y + z)) = x^2 + (y + z)^2 - 2x(y + z)$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } (x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \tag{5}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าแทนค่า z ด้วย $z + w$ จะได้ $(x - y - (z + w)) = (x - y - z - w)$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} (x - y - (z + w))^2 &= x^2 + y^2 + (z + w)^2 - 2xy - 2x(z + w) + 2y(z + w) \\ &= x^2 + y^2 + (z^2 + w^2 + 2zw) - 2xy - (2xz + 2xw) + (2yz + 2yw) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2zw - 2xy - 2xz - 2xw + 2yz + 2yw \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2xy - 2xz - 2xw + 2yz + 2yw + 2zw \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - (2xy + 2xz + 2xw) + (2yz + 2yw + 2zw) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - 2(xy + xz + xw) + 2(yz + yw + zw) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + 2(yz + yw + zw) - 2(xy + xz + xw) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + 2[(yz + yw + zw) - (xy + xz + xw)] \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(x - y - z - w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2xy - 2xz - 2xw + 2yz + 2yw + 2zw$$

หรือ

$$(x - y - z - w)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + 2[(yz + yw + zw) - (xy + xz + xw)] \tag{6}$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n)^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \left(\sum_{j=3}^n \alpha_2 \alpha_j + \sum_{k=4}^n \alpha_3 \alpha_k + \dots + \sum_{l=n-1}^n \alpha_{(n-2)} \alpha_l + \alpha_{(n-1)} \alpha_n \right) \\ &\quad - 2 \sum_{m=2}^n \alpha_1 \alpha_m \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \left(\sum_{\substack{i,j \\ 2 \leq i < j}} \alpha_i \alpha_j - \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k \right) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \dots + \sqrt{\alpha_n})^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i + 2 \sum_{\substack{j,k \\ 1 \leq j < k}}^n \sqrt{\alpha_j \alpha_k}$$

และ

$$(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2} - \dots - \sqrt{\alpha_n})^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i + 2 \left(\sum_{\substack{i,j \\ 2 \leq i < j}}^n \sqrt{\alpha_i \alpha_j} - \sum_{k=2}^n \sqrt{\alpha_1 \alpha_k} \right)$$

5. กำลังสามสมบูรณ์, $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ และ $\forall x, y \geq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^3 &= (\sqrt{x})^3 \pm 3(\sqrt{x})^2 \sqrt{y} + 3\sqrt{x}(\sqrt{y})^2 \pm (\sqrt{y})^3 \\ &= x\sqrt{x} \pm 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} \\ &= x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} \pm 3x\sqrt{y} \\ &= x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} + 3(y\sqrt{x} \pm x\sqrt{y}) \end{aligned}$$

6. กำลัง n สมบูรณ์, พิจารณาสถิตสามเหลี่ยมของปาสคาล(Pascal's Triangle)

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & & & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

ทฤษฎีบททอเนกนาม

ถ้า n, n_1, n_2, \dots, n_k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ แล้ว

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

อาศัยทฤษฎีบทของ เดอ โพลีแนค เลอจองด์ (De-Polignac Legendre) จะได้ว่า

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n \\ n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

4.5 สังยุค(conjugate)

4.6 รูปแบบพิเศษของรากที่สอง

ตัวอย่าง 186. จงหาค่าจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$5 + \sqrt{24} = 3 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

ดังนั้น

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

4.7 ปัญหาหระคน

ตัวอย่าง 187. จงหาค่าของ $3^{\frac{1}{4}}(1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}})(3^{(-\frac{1}{4})} + 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}})$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 3^{\frac{1}{4}}(1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}})(3^{(-\frac{1}{4})} + 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}}) &= (1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}}) 3^{\frac{1}{4}} (3^{(-\frac{1}{4})} + 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}}) \\ &= (1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}}) (3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{(-\frac{1}{4})} + 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) \\ &= (1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}}) (3^{(\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}))} + 3^{(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})} - 3^{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2})}) \\ &= (1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}}) (3^0 + 3^{\frac{2}{4}} - 3^{\frac{3}{4}}) \\ &= (1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}}) (1 + 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{4}}) \\ &= ((1 + 3^{\frac{1}{2}}) + 3^{\frac{3}{4}}) ((1 + 3^{\frac{1}{2}}) - 3^{\frac{3}{4}}) \\ &= (1 + 3^{\frac{1}{2}})^2 - (3^{\frac{3}{4}})^2 \\ &= (1^2 + 2 \cdot (1) (3^{\frac{1}{2}}) + (3^{\frac{1}{2}})^2) - (3^{\frac{3}{4}})^2 \\ &= (1 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3) - 3^{\frac{3}{2}} \\ &= 4 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3^{(1 + \frac{1}{2})} \\ &= 4 + (2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot 3^{(\frac{1}{2})}) \\ &= 4 - 3^{\frac{1}{2}} \\ &= 4 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 188. จงคำนวณหา $\sqrt{(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) + 1}$
โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

วิธีทำ

กำหนดให้ $x = 1,000,000 = 10^6$ ซึ่งจะได้ว่า

$$(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) = (1,000,000)(1,000,000 + 1)(1,000,000 + 2)(1,000,000 + 3)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) &= x(x+1)(x+2)(x+3) \\ &= x(x+3)(x+1)(x+2) \\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2) \end{aligned}$$

กำหนดให้ $y = x^2 + 3x$ จะได้ว่า

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1 = y(y+2) + 1 = (y+1)^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} &= y + 1 \\ &= x^2 + 3x + 1 \\ &= (10^6)^2 + (3 \cdot 10^6) + 1 \\ &= 10^{12} + (3 \cdot 10^6) + 1 \\ &= 1,000,003,000,001 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) + 1} = 1,000,003,000,001$$

คำถาม 189. จงหาค่าของ $\left[2^{\frac{1}{4}}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\right)\left(2^{(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2$

คำถาม 190. จงหาค่าของ $\sqrt{4^{\frac{1}{4}}\left(1+4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{3}{4}}\right)\left(4^{(-\frac{1}{4})}+4^{\frac{1}{4}}-4^{\frac{1}{2}}\right)}$

คำถาม 191. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{\left[5^{\frac{1}{4}}\left(1+5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{3}{4}}\right)\left(5^{(-\frac{1}{4})}+5^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}}$

คำถาม 192. จงคำนวณหา $\sqrt{(100)(101)(102)(103) + 1}$ โดยไม่ต้องเครื่องคำนวณ

คำถาม 193. จงคำนวณหา $\sqrt{(200)(201)(202)(203) + 1}$ โดยไม่ต้องเครื่องคำนวณ

คำถาม 194. จงคำนวณหา $\sqrt{(503)(502)(501)(500) + 1}$ โดยไม่ต้องเครื่องคำนวณ

คำถาม 195. จงคำนวณหา $\sqrt{(11,503)(11,502)(11,501)(11,500) + 1}$ โดยไม่ต้องเครื่องคำนวณ

คำถาม 196. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots}}}} = 2$

คำถาม 197. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 98$

คำถาม 198. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\vdots}{1 + \frac{1}{x}}}}} = x$$

คำถาม 199. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x + \sqrt{x - 11}} = 4$$

คำถาม 200. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ ราก}} = x$$

คำถาม 201. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$ เป็นจริง

คำถาม 202. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $(x - 7)(x - 3)(x + 5)(x + 1) = 1680$ เป็นจริง

5 ตัวอย่างข้อสอบ

1. จงหาค่าของ $\frac{3^{2(3n-1)} \times 3^{3(3-n)} \times 81^{\frac{1-n}{4}} \times 2^{2(m+1)}}{(3^4)^{\frac{n}{2}} \times 3^5 \times 2^{2m-1}}$
2. จงหาค่าของ $\frac{(3 \times 2^{n+1}) - (4 \times 2^{n-2})}{2^n - 2^{n-1}}$
3. จงหาค่า 2^{-2x} เมื่อ $2^x = 0.25$
4. จงหาค่า m เมื่อ $64^{m+2} = 1$
5. จงหาค่า k เมื่อ $2^{k+5} - 248 = 2^{2k}$
6. ข้อใดมีค่ามากที่สุด ถ้า $a = 2^{45}$, 3^{36} , $c = 4^{27}$, $d = 5^{18}$, $e = 6^9$
7. (Onet 25 ก.พ. 49) จงหาค่าของ $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32})^2$
8. (Onet 25 ก.พ. 49) จงหาค่าของ $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$
9. (Onet 24 ก.พ. 50) จงหาค่าของ $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}} \cdot \frac{(18)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$

10. (Onet 24 ก.พ. 50) จงหาค่าของ $(1 - \sqrt{2})^2(2 + \sqrt{8})^2(1 + \sqrt{2})^3(2 - \sqrt{8})^3$
11. (Onet 24 ก.พ. 50) ถ้า $\left(3 + \frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ จงหาค่าของ x
12. (B-PAT1 25 ต.ค. 51) ถ้า $6^{x+y} = 36$ และ $5^{x+2y} = 125$ จงหาค่า x
13. (B-PAT1 25 ต.ค. 51) ถ้า $xy = 2$ จงหาค่า $\frac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$
14. (Onet 21 ก.พ. 52) จงหาค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$
15. (PAT 7 มี.ค. 52) ถ้า $4^{y-x} = 128$ และ $3^{2y+x} = 81$ จงหาค่า y

6 ตัวอย่างโจทย์ครูอาหนึ่ง

1. จงหาผลสำเร็จของ $2^{3^{024}8^0}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
2. จงหาผลสำเร็จของ $\frac{2^{-2} + 2^2}{2^2 - 2^{-2}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
3. จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{(111_2)^2 + (102_3)^2}{2 \times 101_4}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
4. จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{2^3 + 2^4 - 2^5}{2^3}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
5. จงหาผลสำเร็จของ $\left(\frac{(x-y)^3(2x-2y)^{-4}}{(4x-4y)^{-2}}\right)^5$ (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
6. จงหาค่าของ $\frac{1^{1000x} + 1^{2^{100}x}}{1^{5x} + 1^{2|x|}}$ โดยที่ x เป็นจำนวนเต็ม (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
7. ให้ $A = \frac{2^{16} - 1}{2^4 - 1}$ มีจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกกี่จำนวนที่หาร A ลงตัว (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
8. กำหนดให้ $N^5 = 32768$ และ $M^4 = 1296$ จะได้ ห.ร.ม. ของ N กับ M มีค่าเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
9. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $a^4 < b^4 < c^4 < 700$ จะได้ $\frac{6}{25} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}\right)$ มีค่ามากที่สุดเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
10. ให้ $s < t < x < y < z < 225$ และ $\sqrt{s}, \sqrt{t}, \sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\frac{x + y + z - 2}{t - s}$ มีค่ามากที่สุดเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไว)
11. ถ้าผลต่างของกำลังสามของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกัน คือ y เมื่อ y คือจำนวนนับ แล้ว y จะเป็นจำนวนนับใดบ้าง (ครูอาหนึ่ง ชูไว)

12. ถ้าผลต่างของกำลังสองของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกัน คือ x เมื่อ x คือจำนวนนับ แล้วผลบวกของ x ทุกตัว โดยที่ $x \leq 100$ มีค่าเป็นเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)
13. ถ้า s เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่หาร $x^2 - y^2$ ลงตัว สำหรับจำนวนคี่บวก x และ y ทุกตัว โดยที่ $x > y$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{3s+4}{4}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)
14. ให้ $s < t < x < y < z < 1000$ และ $\sqrt[3]{s}, \sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}, \sqrt[3]{z}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $2(x+y)s - 3tz$ มีค่ามากที่สุดเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)
15. จงหา $\sqrt{(1,000,000,000,001)(1,000,000,000,002)(1,000,000,000,003)(1,000,000,000,004) + 1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

16. จงหาค่าของ $\frac{\left(\sqrt[4]{\left[2^{\frac{1}{4}}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\right)\left(2^{(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

17. จงหาค่า \sqrt{x} โดยที่ x เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\sqrt{x+\sqrt{x+13}}+\sqrt{x+\sqrt{x-13}}=5$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

18. จงประมาณค่าของ $\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{116}}{\sqrt{53}}+\sqrt{111}\right)^5}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

19. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $\sqrt[4]{2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}}=\left(\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$ เป็นจริง (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

20. จงหาค่า $\sqrt{2x}$ ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}_{n \text{ ราก}} = x$$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

21. จงหาค่า $(5x-1)^{\frac{3}{5}}$ ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\vdots}{1+\frac{1}{x}}}}} = x$$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

22. สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}^+$ จงหาค่า $\sqrt{\left(\sqrt[n]{a+b}\right)^{2n}}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ทำให้ $\sqrt{12 - 2\sqrt{21}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

23. ถ้า $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} = 4$ แล้ว $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{(81)^x}{\sqrt[3]{(27)^x}}\right)}}{2}}$ มีค่าเป็นเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)