ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

Limit and Continuity of a Function

โดย **ครูอาหนึ่ง ชูไวย**

ครูโครงการ สควค. รุ่น 11

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

ฉบับปรับปรุงวันที่ 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552

คำนำ

การเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้ดี ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้ความเข้าใจใน คณิตศาสตร์พื้นฐาน มีทักษะการคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ ความรู้ ความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย ตลอดจนมีความเข้าใจและรู้จักการ ใช้เหตุผล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบและนำความรู้นั้นไปประยุกต์เชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆได้เป็นอย่างดี **สิ่งที่สำคัญก็คือ มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์**

เอกสารเล่มนี้ประกอบด้วยแบบฝึกหัด เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่มีความหลากหลาย จำนวน 12 แบบฝึกหัด ดังนี้

แบบฝึกหัด ชุดที่ 1 เรื่อง การหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์ (1)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 2 เรื่อง การหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์ (2)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 3 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (1)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 4 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (2)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 5 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (3)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 6 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (4)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 7 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (5)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 8 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (6)
แบบฝึกหัด ชุดที่ 9 เรื่อง ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา
แบบฝึกหัด ชุดที่ 10 เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันเงื่อนไข
แบบฝึกหัด ชุดที่ 11 เรื่อง การหาลิมิตค่าอนันต์
แบบฝึกหัด ชุดที่ 12 เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้เรียบเรียงขอมอบคุณความดีในการจัดทำเอกสารเล่มนี้แด่ครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชา คณะผู้บริหารโรงเรียนเทิงวิทยาคมที่ส่งเสริมการพัฒนาผลงานด้านวิชาการ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่มอบทุนการศึกษาโครงการ สควค. ให้ผู้เรียบเรียงตลอดระยะเวลา 5 ปี จนจบการศึกษาและน้อมเป็นเครื่องบูชาพระคุณแด่บิดามารดา และคุณยายต่อม ค้าแป้ง ผู้ล่วงลับที่เป็นกำลังใจให้ผู้เรียบเรียงตลอดมา

อนึ่ง หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อเสนอแนะประการใดสำหรับเอกสารเล่มนี้ผู้เรียบเรียง ยินดีรับฟังและจะแก้ไขต่อไป ขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

อาหนึ่ง ชูไวย
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนเทิงวิทยาคม
อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

สารบัญ

บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดย ครูอาหนึ่ง ชูไวย

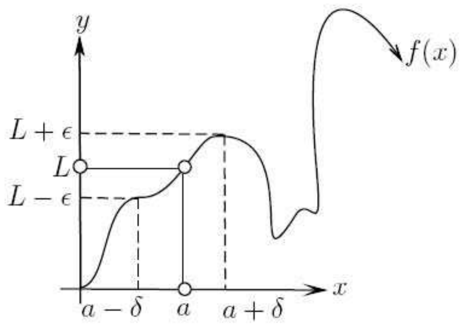
1.1 สรุปสูตรและทฤษฎีบทของลิมิต

1. $\lim_{x \to a} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} [kf(x)] = k \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)][\lim_{x \to a} g(x)]$
6. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$
8. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$
9. $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)|$

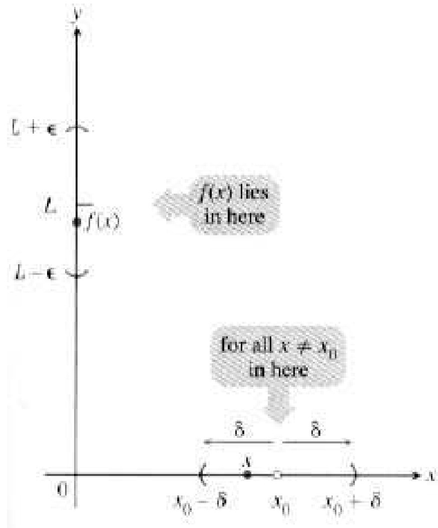
หมายเหตุ สูตร 1.–9. ยังคงเป็นจริงสำหรับการแทนค่า $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a^-$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x \to a^-} f(x) = L}$$

นั่นคือ $\lim_{x \to a} f(x)$ จะมีค่า ก็ต่อเมื่อ ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวามีค่าเท่ากัน



รูปที่ 1.1: ลิมิตของฟังก์ชัน(1)



รูปที่ 1.2: ลิมิตของฟังก์ชัน(2)

ทฤษฎีบท 1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก n ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $x > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก n ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $x > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงลบ n ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $x < n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงลบ n ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $x < n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases} \qquad \text{(ดังรูปที่ 1.3)}$$

ทฤษฎีบท 5. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a-\delta < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

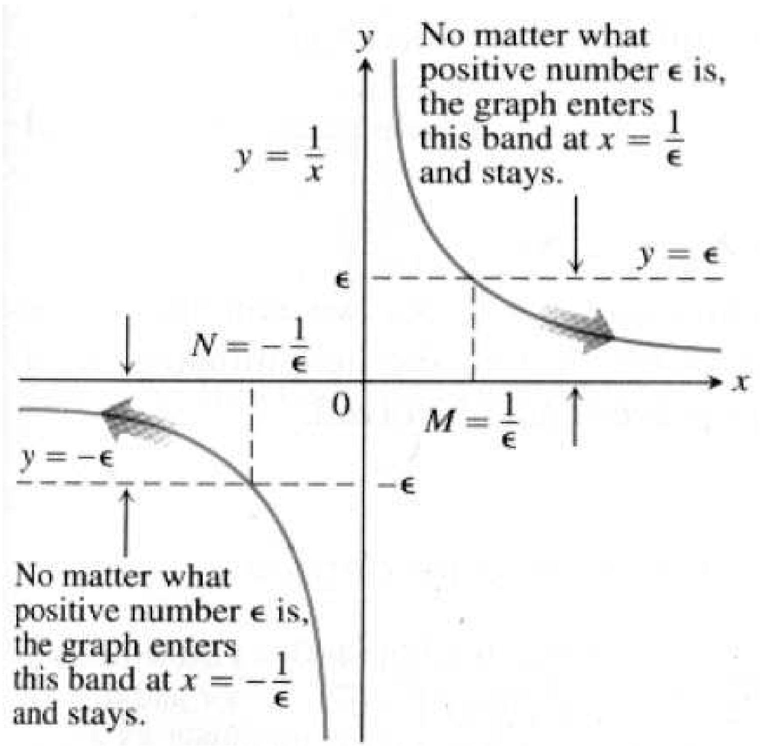
2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a-\delta < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

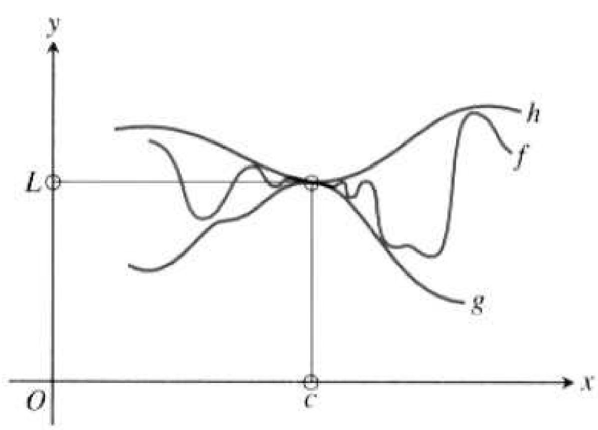
ทฤษฎีบท 6. **(**$Sandwich\ Theorem$ **หรือ** $Squeeze\ Theorem$**)** ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ สำหรับทุกๆจำนวนจริง x ที่อยู่ในช่วงเปิดใดๆที่มี a เป็นสมาชิก โดยที่ $x \neq a$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ (ดังรูปที่ 1.5)

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ดังนั้น ถ้าเราต้องการตรวจสอบว่า $y = f(x)$ มีความต่อเนื่องของ ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ



รูปที่ 1.3: ลิมิตทางซ้าย-ทางขวา



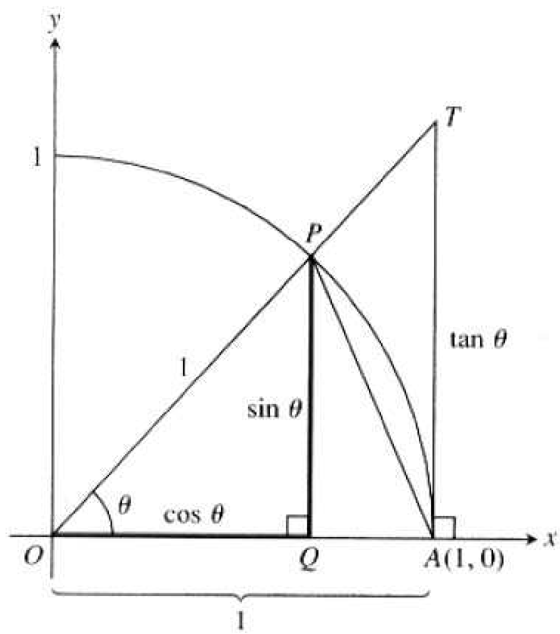
รูปที่ 1.4: *Sandwich Theorem*

1. $f(a)$ มีค่า

2. $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า

3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ทฤษฎีบท 7. สำหรับ θ ใดๆในระบบเรเดียน จะได้ว่า $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (ดังรูปที่ 1.5)



รูปที่ 1.5: ค่า $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

1.2 สัญลักษณ์ที่นักเรียนควรทราบ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$ **(เซตของจำนวนธรรมชาติ** หรือ **เซตของจำนวนเต็มบวก)**

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$ **(เซตของจำนวนเต็ม)**

$$\mathbb{Z}^- = \{\cdots, -3, -2, -1\}$$ **(เซตของจำนวนเต็มลบ)**

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$$ **(เซตของจำนวนเต็มบวก)**

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ และ } m \neq 0\right\}$$ **(เซตของจำนวนตรรกยะ)**

$\mathbb{Q}' =$ **เซตของจำนวนอตรรกยะ**

$\mathbb{R} =$ **เซตของจำนวนจริง**

$\mathbb{R}^- =$ **เซตของจำนวนจริงลบ**

$\mathbb{R}^+ =$ **เซตของจำนวนจริงบวก**

$$\mathbb{C} = \{(a, b) = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$ **(เซตของจำนวนเชิงซ้อน)**

$$\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset$$
$$\mathbb{Z}^- \cap \{0\} = \emptyset$$
$$\{0\} \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$$
$$\mathbb{Z}^- \cap \{0\} \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset$$
$$\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset$$
$$\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

1.3 ความรู้พื้นฐาน

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- สังยุคของ $a \pm b$ คือ $a \mp b$

- $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$
- $|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{เมื่อ } x-a \geq 0, x \geq a \\ -(x-a)\text{หรือ } a-x & \text{เมื่อ } x-a < 0, x < a \end{cases}$
- $|x+a| = \begin{cases} x+a & \text{เมื่อ } x-a \geq 0, x \geq -a \\ -(x+a) & \text{เมื่อ } x+a < 0, x < -a \end{cases}$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|kx \pm ky| = |k(x \pm y)| = |k| \cdot |x \pm y|, \forall k, x, y \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- $x - y = -(y - x), \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
- $x - y = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y}^2)$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $\sin(A \pm B) = \sin a \cos A \pm \cos A \sin B$
- $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
- $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$
- $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$

- $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
- $1+2+\ldots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1),\ \forall n\in\mathbb{N}$

©©

แบบฝึกหัด ชุดที่ 1 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์ (1)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. $a_n = 2n - 1$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. $a_n = (-1)^r\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$; $r = 0, 1, 2, \ldots$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $a_n = \dfrac{1}{n}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. $a_n = |\cos(n\pi)|$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. $a_n = \dfrac{4n+1}{5n+7}$

6. $a_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{5n^2-7}$

7. $a_n = \dfrac{3n^3+1}{2n^2+3}$

8. $a_n = \dfrac{9n^2+1}{3n+2}$

9. $a_n = \dfrac{(2n^3+1)^2}{2n^4 \cdot n^5+3}$

10. $a_n = \dfrac{1 - 2n + 3n^3}{3n^2 + 2}$

. . . .

11. $a_n = \dfrac{2n^7 - 1}{3n^2 \cdot 2n^5 + 4}$

. . . .

12. $a_n = (-1)^r \sin(|n\pi|)\ ;\ r = 1, 2, 3, \ldots$

. . . .

13. $a_n = \sin(n\pi)$

. . . .

14. $a_n = |\sec(n\pi)|$

. . . .

15. $a_n = \dfrac{5n^4+1}{n^4+7}$

....
....
....
....
....
....

16. $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2n+11}$

....
....
....
....
....
....

17. $a_n = \dfrac{2n^2+3}{3n^3+1}$

....
....
....
....
....
....

18. $a_n = \dfrac{3n^3+5}{12n^2+7}$

....
....
....
....
....

19. $a_n = \dfrac{(n^3+3n^2-1)^2}{(2n^3+3)^3}$

....
....
....
....
....

แบบฝึกหัด ชุดที่ 2 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์ (2)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

1. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1}{5-\sqrt[4]{n}+3\sqrt{5n}}\right)$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|-\dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{5n+2}\right|$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^3-n+5}{2n^3+2}+2\right)$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}\right)$

....
....
....
....
....
....
....
....

5. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|+\left(\frac{2n}{n+1}\right)\right\}$

....
....
....
....
....
....
....
....

6. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt[3]{8n^3+1}}$

....
....
....
....
....
....
....
....

7. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n^5+1}}{\sqrt[4]{n^3+n^2+n+1}}\right)$

....
....
....
....
....
....

8. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n}$

....
....
....
....
....
....

9. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sin a_n = \sin \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sin A$

ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(\pi n^2)+n}{\sqrt{36n^4+1}}$

....
....
....
....
....
....

10. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \log b_n = \log \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \log B$

ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(\dfrac{n^3+2}{\sqrt{n^6-5}}\right)$

....
....
....
....
....
....

11. (โควตา มช. 2538) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(1-5)^n}{(n+1)5^n}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

12. (โควตา มช. 2539) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}\right)$

13. (โควตา มช. 2540) ให้ $f(x)=x^2$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{10}\right)\right]$ เมื่อ $n\in\mathbb{Z}^+$

14. (โควตา มช. 2544) จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{6^2}+\dfrac{35}{6^3}+\ldots+\dfrac{2^2+3^n}{6^n}\right)$

15. (โควตา มช. 2541) กำหนด $a_n = \dfrac{n^2+1}{4^{n-1}}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ จงหา $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

16. (โควตา มช. 2545) กำหนดให้ลำดับ $a_n = \dfrac{2^n+5}{2n+3}$ และ ลำดับ $b_n = \dfrac{2^n}{n}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

17. (Entrance) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}+3^{n-1}}{2^{n+1}+5^{n-1}}$

18. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n}$

19. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^5-5n^3+3n}{n^7-4}$

20. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n+\sin n}{2\pi n}$

แนะนำ ใช้ Squeeze Theorm ซึ่งกล่าวว่า ถ้า $a_n \le b_n \le c_n$ และ $\lim\limits_{a_n} = \lim\limits_{b_n} = L$ แล้ว $\lim\limits_{b_n=L}$ ช่วยในการหาคำตอบ

21. (ครูอาหนึ่ง ชูไวย) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n + (-1)^n}{2\pi n}$

    แนะนำ ใช้ Squeeze Theorm ซึ่งกล่าวว่า ถ้า $a_n \le b_n \le c_n$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ ช่วยในการหาคำตอบ

22. (Entrance) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 2n + 5}{6n^2} + 8 \right)$

23. (Entrance) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ เมื่อ $a_n = 3,\ 3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3\sqrt{3}}\ , 3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 3 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน(1)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จากตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 5x - 2$ และ $a = 2$

x	$f(x)$
3	13.0000
2.5	10.5000
2.1	8.5000
2.01	8.0500
2.001	8.0050

x	$f(x)$
1	3.0000
1.5	5.5000
1.9	7.5000
1.99	7.9500
1.999	7.9950

....
....
....
....
....
....
....
....

2. $f(x) = \dfrac{3x}{x+5}$ และ $a = 1$

x	$f(x)$
2	0.8571
1.5	0.6923
1.1	0.5410
1.01	0.5042
1.001	0.5004

x	$f(x)$
0	0.0000
0.5	0.2727
0.9	0.4576
0.99	0.4958
0.999	0.4996

....
....
....
....
....
....
....
....

3. $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ และ $a = 0$

x	$f(x)$
-1	-0.2679
-0.5	-0.2583
-0.1	-0.2516
-0.01	-0.2502
-0.001	-0.2500

x	$f(x)$
1	-0.2361
0.5	-0.2426
0.1	-0.2485
0.01	-0.2498
0.001	-0.2500

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. $f(x) = \begin{cases} 4-3x, & \text{เมื่อ } x < -2 \\ x^2+3, & \text{เมื่อ } x \geq -2 \end{cases}$ และ $a = -2$

x	$f(x)$
-1	4.0000
-1.5	5.2500
-1.9	6.6100
-1.99	6.9601
-1.999	6.9960

x	$f(x)$
-3	13.0000
-2.5	11.5000
-2.1	10.3000
-2.01	10.0300
-2.001	10.0030

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

แบบฝึกหัด ชุดที่ 4 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (2)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to -1}(3x-7)$

   ....
   ....
   ....
   ....

2. $\lim_{x\to -2}(x^2+2x+4)$

   ....
   ....
   ....
   ....

3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{3-4x}$

   ....
   ....
   ....
   ....

4. $\lim_{x\to 2}(x^3-2x^2+5)$

   ....
   ....
   ....
   ....

5. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+8}$

   ....
   ....
   ....
   ....

6. $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{2x^2+5}$

   ....
   ....
   ....
   ....

7. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

8. $\lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt{\dfrac{3x^2 + 4x - 2}{3x^3 + 6}}$

9. $\lim\limits_{x \to -1} (2x^3 - 4x^2 + 5x + 3)$

10. $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 - 5x + 5)^{2/3}$

11. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 1)(1 - 5x)$

12. $\lim\limits_{x \to 2} (1 + 2x - 3x^2)^3$

13. $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{9+x^2}$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x+1)^5}{(5x-2)^4}$

15. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(3x-8)^4}{(4x-15)^3}$

16. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x}{(x-4)^2}$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 5 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (3)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552

การทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและการใช้สังยุค (Simplify and Conjugation)

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3+x} - \dfrac{1}{3}\right)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{a}\right)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{4-\sqrt{x-9}}{\sqrt{x^2-576}-7}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+3x-4}$

7. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-h^{-2}}{1+h^{-2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}}$

9. $\lim\limits_{x \to -2} \left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(\frac{5}{4 - x^2}\right)$

10. $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x - 7}{\sqrt{x + 2} - 3}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2}}\right)$

12. $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt[3]{x+5}-1}{x+4}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

14. $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x+\sqrt{x}-12}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{x}$

16. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - \sqrt{x^2+5}}{x^2-4}$

17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{3 - \sqrt{x^2+5}}$

18. $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

19. $\lim_{x\to 4} \left(\dfrac{1/\sqrt{x}-1/2}{x-4}\right)$

20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

21. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{8x^{-3} + 2x^{-2} + x^{-1} + 1}{x + 2}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{7 + \sqrt{4 - 2x}} - 3}{x}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{4-x}}-\sqrt{5}}{x}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt[3]{x+5}-1}{x+4}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-7x+16}-\sqrt{6}}{(x-5)(x+1)}$

29. $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{12 - \sqrt{x^2}} - 3}$

30. $\displaystyle\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 6 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (4)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552

การหาค่าลิมิตโดยใช้การแยกตัวประกอบ (Factorization)

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2 - x - 6)^4}{(x+2)^2}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. $\lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 1}}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+7x+6}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{3x-9}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{6x^3-11x^2+6x-1}{6x^2-11x+3}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{4t^2 - 3t + 2}{t^3 + 2t - 6}$

7. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2h + 3xh + h^3}{2xh + 5h^2}$

8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

9. $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t^3+t^2-5t+3}{t^3-3t+2}$

10. $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

11. $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$

12. $\lim\limits_{y \to 4} \dfrac{2y^3 - 11y^2 + 10y + 8}{3y^3 - 17y^2 + 16y + 16}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

13. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 + 6x - 91}{x^2 + 12x - 133}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

14. $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

15. $\lim\limits_{s\to 4} \dfrac{3s^2-8s-16}{2s^2-9s+4}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-7x+2}{8-2x-x^2}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

18. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to 2} \frac{t^3 + 3t^2 - 12t + 4}{t^3 - 4t}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$

21. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 + x - 30}{x - 3}$

22. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

23. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{1 + 2x^{-1} + 6x^{-2} + 5x^{-3}}$

24. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{2 - x}$

25. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1/3 - 1/x}{x - 3} \right)$

26. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+2)^2 - 4}{x}$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 7 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (5)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552

การหาค่าลิมิตโดยการใช้สูตร (Formulas)

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

6. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^8-1}{x+1}$

8. $\displaystyle\lim_{t\to \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8t^3-27}{4t^2-9}}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

10. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^2 - 1}$

11. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 9^{\frac{1}{3}}}{x - 3}$

12. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^8 - 256}{x^2 - 4}$

13. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^2 - 1}$

14. $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

15. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{9x - 3}{54x^3 - 2}$

16. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{(x-5)^3-8}{98-2x^2}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

17. $\lim\limits_{s\to a} \dfrac{s^4-a^4}{a^2-s^2}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

18. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|(x-4)^3|}{x-4}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

19. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{3x}{(x-4)^2}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$

21. $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t+2}{t^2-4}$

22. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{-t+2}{(t-2)^2}$

23. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

24. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{|2x-4|}$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 8 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน (6)** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Limit of Trigonometry Function)

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

สิ่งที่ควรรู้

1. $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน
2. $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน
3. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน
4. $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน

คำสั่ง; <u>จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้</u>

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 7x}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{4z}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos^2 \frac{1}{2}x}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 3x}$

11. $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\sin 4y}{\cos 3y - 1}$

12. $\lim_{x\to\pi^+} \dfrac{\tan x}{x-\pi}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x\sec x}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

15. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{\tan 2x}$

16. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\pi - 4x)}{x - \frac{\pi}{4}}$

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\csc 3x}{\cot x}$

18. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 3x}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

19. $\lim_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos 3h}{\cos 4h - 1}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

20. $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2 - 3x}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

21. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos 5h}{\cos 7h - 1}$

22. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sin(x-5)}{x^2 - 25}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{\sin x}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{3x^2 + 2x}$

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sec x - 1}$

26. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(2x - 4)}{x^2 - 4}$

27. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{\sin(x^2+3x+2)}{x+2}$

28. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x^2+3x+2)}{x^3+1}$

29. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - 1)\tan x}{2\cos x}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{2\cos^2 x}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{x-\pi}$

33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

34. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}$

35. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\big(1 - \cos\big(\dfrac{1}{x}\big)\big)$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 9 เรื่อง **ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงเขียนกราฟและหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้ามี) และให้เหตุผล (ถ้าไม่มีลิมิต)

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. $f(t) = \begin{cases} t+4 & \text{เมื่อ } t \leq -4 \\ 4-t & \text{เมื่อ } -4 < t \end{cases}$

1) $\lim\limits_{t \to -4^+} f(t)$ 2) $\lim\limits_{t \to -4^-} f(t)$ 3) $\lim\limits_{t \to -4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s+3 & \text{เมื่อ } s \leq -2 \\ 3-s & \text{เมื่อ } -2 < s \end{cases}$

1) $\lim\limits_{s \to -2^+} g(s)$ 2) $\lim\limits_{s \to -2^-} g(s)$ 3) $\lim\limits_{s \to -2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{เมื่อ } x < 3 \\ 10 - x & \text{เมื่อ } 3 \leq x \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r+3 & \text{เมื่อ } r < 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } r = 1 \\ 7-2r & \text{เมื่อ } 1 < r \end{cases}$

1) $\lim\limits_{r \to 1^+} g(r)$ 2) $\lim\limits_{r \to 1^-} g(r)$ 3) $\lim\limits_{r \to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3+t^2 & \text{เมื่อ } t < -2 \\ 0 & \text{เมื่อ } t = -2 \\ 11-t^2 & \text{เมื่อ } -2 < t \end{cases}$

1) $\lim\limits_{t \to -2^+} g(t)$ 2) $\lim\limits_{t \to -2^-} g(t)$ 3) $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{เมื่อ } 1 < x \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

11. $f(x) = |x - 5|$

1) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x - 4|$

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ต่อไปนี้

13. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{เมื่อ } x < -2 \\ 1+3x & \text{เมื่อ } -2 \le x \le 2 \\ 3x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ และ $c = -2, 2$

14. $f(x) = \begin{cases} 5-2x & \text{เมื่อ } x > 3 \\ 3x-10 & \text{เมื่อ } x \le 3 \end{cases}$ และ $c = 3$

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x+2} & \text{เมื่อ } x < -2 \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{เมื่อ } x > -2 \end{cases}$ และ $c = -2$

16. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{7+2x^2} & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-x+1}{4x+5} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$ และ $c = -1$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x+2 & \text{เมื่อ } 1 \leq x < 2 \\ 2x^3-1 & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ และ $c = 1, 2, 3$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

18. $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2}$ และ $c = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

19. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x + 1}$ และ $c = -1$

20. $f(x) = \dfrac{|x(x - 3)|}{x - 3}$ และ $c = 3$

21. จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ มีค่า เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & \text{เมื่อ } x < -3 \\ 3ax - 7b & \text{เมื่อ } -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

22. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} & \text{เมื่อ } -2 \leq x \leq 0 \\ ax^2 + b & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \\ 4 + x & \text{เมื่อ } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ หาค่าได้

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

23. จงหาค่าของ A ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ มีค่า เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{7+2A} & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - x + 1}{4x+5} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$

24. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x|2-x| & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$

จงตรวจสอบว่า $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ หาค่าได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

25. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & \text{เมื่อ } x \le 2 \\ 1-3x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

แบบฝึกหัด ชุดที่ 10 เรื่อง **การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันเงื่อนไข** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; <u>จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้</u>

1. (คณิตศาสตร์ กข 2540) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

   จงหา $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

2. (คณิตศาสตร์ กข 2538) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \dfrac{|1-x|}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

   จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

3. (คณิตศาสตร์ กข 2543) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ x-1 & \text{เมื่อ } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$

   แล้ว $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{f(x-1)}{x+2}\right)$ มีค่าเท่าใด

4. (คณิตศาสตร์ กข 2545) กำหนดให้ $a > 0$

   และ กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{เมื่อ } x < a \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{เมื่อ } x > a \end{cases}$

   และ $g(x) = x^2$ ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} (f \circ g)(\sqrt{x}) - \sqrt{\lim\limits_{x \to a^-} (g \circ f)(\sqrt{x})} = \dfrac{11}{a(a+2)}$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

5. (โควตา มช. 2538) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ \dfrac{x+3}{3-x} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x+23} & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

6. (คณิตศาสตร์ กข 2541) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } x < -1 \\ x + \dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{3}{2} & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

7. (คณิตศาสตร์ กข 2537) ถ้า กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } 1 < x \le 2 \\ 3 - x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

   จงหา $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

8. (โควตา มช. 2543) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x - 2\sqrt{x} + 1} & \text{เมื่อ } x > 0,\ x \neq 1 \\ k & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

   จงหาจำนวนจริง k ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to 1} f(1) = f(1)$

9. (โควตา มช. 2545) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{3}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 3 & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \to 0} f(x)$ และ $\lim_{x \to 2} f(x)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10. (โควตา มช. 2548) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4}{x-5} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \dfrac{x^2-4x}{x^2+5x} & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \to 0} f(x)$ และ $\lim_{x \to 1} f(x)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

11. (ประยุกต์โควตา มช. 2549) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)}{x-1} & \text{เมื่อ } 0 \le x \le 1,\ x \ne 1 \\ 5 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 3+\sqrt{1-(x-3)^2} & \text{เมื่อ } 2 < x \le 4 \end{cases}$

จงหา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ และ $f(1)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

12. (โควตา มช. 2544) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} |x^2-5x-6| & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 10x-k & \text{เมื่อ } x \le 2 \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง k ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

13. (โควตา มช. 2537) กำหนดให้ $f(x)$ = $\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ a(x-2)+2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ ที่ทำให้ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

แบบฝึกหัด ชุดที่ 11 เรื่อง **การหาลิมิตค่าอนันต์** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงพิจารณาลิมิตต่อไปนี้ว่าหาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงหาค่าลิมิตดังกล่าว

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{(x-3)^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x}{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{\sqrt{-x-2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4+\sqrt{1+x^2}}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4x+3}{x^2-4}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{(x-1)^2}$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 12 เรื่อง **ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน** 24 กรกฎาคม พ.ศ. 2552
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้น ม. 6 โดยครูอาหนึ่ง ชูไวย

คำสั่ง; จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{2x-\frac{\pi}{2}} & \text{เมื่อ } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ 2\pi k + 1 & \text{เมื่อ } x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$
   จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = \dfrac{\pi}{4}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 3x + 2k^2 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$
   จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{เมื่อ } x \le 4 \\ kx-1 & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$

   จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = 4$

4. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ 3x+k & \text{เมื่อ } -1 < x \le 2 \\ -5x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

   จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = -1$ และ $x = 2$

5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + 2k & \text{เมื่อ } x < -2 \\ 3kx + 2 & \text{เมื่อ } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และ $x = 1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} kx - 1 & \text{เมื่อ } x \leq -3 \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & \text{เมื่อ } |x| < 3 \\ kx^2 - 1 & \text{เมื่อ } x \geq 3 \end{cases}$

จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = -3$ และ $x = 3$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

7. (โควตา มช. 2538) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ \dfrac{x+3}{3-x} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x+23} & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 0, 2$

ข. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0, 2$

ค. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ และ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

ง. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ และ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$

8. (คณิตศาสตร์ กข 2541) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } x < -1 \\ x + \dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } -1 \le x \le 3 \\ \dfrac{3}{2} & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่จุด $x = 3$

ค. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่จุด $x = -1$

ง. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่จุด $x = -1$ และ $x = 3$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

9. (คณิตศาสตร์ กข 2537) ถ้า กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 2 \\ 3-x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   ก. h ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

   ข. h ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

   ค. h ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และต่อเนื่องที่ $x = 2$

   ง. h ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

10. (คณิตศาสตร์ กข 2537) กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงแล้ว จะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

ก. $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$

ข. $f(-1) = 3$ และ $f(1) = -1$

ค. $f(-1) = -1$ และ $f(1) = -3$

ง. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 3$

11. (โควตา มช. 2543) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-2\sqrt{x}+1} & \text{เมื่อ } x > 0,\ x \neq 1 \\ k & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

จำนวนจริง k ในข้อใดที่ทำให้ f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 4

12. (โควตา มช. 2542) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \neq \pm 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = \pm 1 \end{cases}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. f ไม่มีลิมิตที่ $x = 1$

ข. f มีลิมิตที่ $x = -1$

ค. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ง. f ต่อเนื่องที่ $x = -1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

13. (โควตา มช. 2545) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{3}{x^2 - 1} & \text{เมื่อ } x \le 0 \\ 3 & \text{เมื่อ } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 2$

ข. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 2$

ค. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ง. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

14. (โควตา มช. 2548) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{4}{x-5} & \text{เมื่อ } x<2 \\ \dfrac{x^2-4x}{x^2+5x} & \text{เมื่อ } 0<x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x} & \text{เมื่อ } x>1 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ และ $x=1$

ข. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ และ $x=1$

ค. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$

ง. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ แต่ต่อเนื่องที่ $x=1$

15. (ประยุกต์โควตา มช. 2549) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)}{x-1} & \text{เมื่อ } 0 \le x \le 1,\ x \ne 1 \\ 5 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 3+\sqrt{1-(x-3)^2} & \text{เมื่อ } 2 < x \le 4 \end{cases}$

f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

16. (โควตา มช. 2544) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} |x^2-5x-6| & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 10x-k & \text{เมื่อ } x \le 2 \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง k ที่ทำให้ f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

17. (โควตา มช. 2537) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ a(x-2) + 2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$