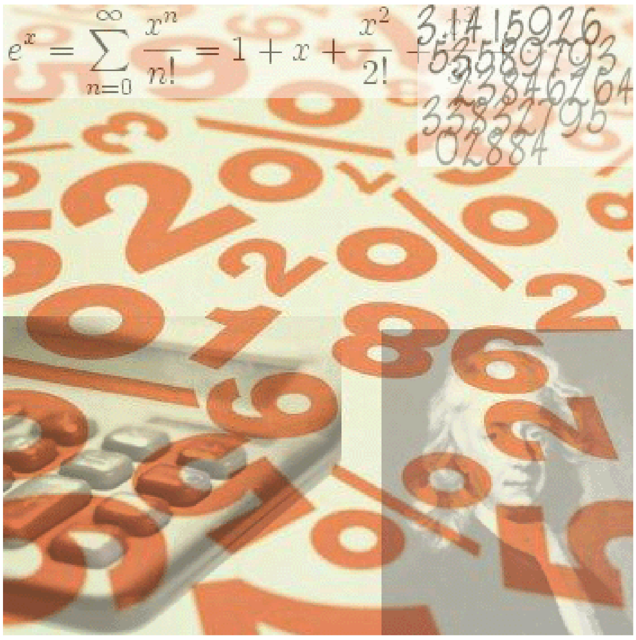
# ระบบจำนวนจริง
# (Real Number System)




## หนังสือเรียนออนไลน์
## ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
## ชุด “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” เล่มที่ 3


**สัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์**

# คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 2

"การปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นครั้งที่ 2 โดยผู้เขียนได้เรียบเรียงคำอธิบายในบทที่ 1 บางส่วนใหม่ พร้อมทั้งได้เพิ่มเติมตัวอย่างประกอบและแบบฝึกหัดเพื่อให้ผู้อ่านได้ฝึกฝนการให้เหตุผลเอาไว้ด้วย นอกจากนั้นยังได้แก้ไขคำเฉลยของตัวอย่างปัญหาในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.3 และหัวข้อที่ 3.4 ใหม่ ให้มีความชัดเจนและถูกต้องตามหลักวิชามากยิ่งขึ้น

สำหรับหนังสือเฉลยแบบฝึกหัดของหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้ก็ได้ถือโอกาสปรับปรุงใหม่ และได้นำออกเผยแพร่พร้อมๆ กับหนังสือเรียนออนไลน์ฉบับปรับปรุงใหม่ล่าสุดนี้ด้วย ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าในการปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์ครั้งนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านบ้างพอสมควร"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

17 มิถุนายน พ.ศ. 2552

# คำนำ

"หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นเล่มที่ 3 ในจำนวนทั้งหมด 15 เล่ม ซึ่งผู้เขียนตั้งใจเรียบเรียงขึ้นเพื่อนำเสนอคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในมุมมองใหม่ซึ่งไม่ได้อยู่ในหนังสือเรียน กล่าวคือ จะเน้นการศึกษาโครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทและการพิสูจน์ทฤษฎีในเรื่องต่างๆ ตลอดจนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงเพื่อเป็นการต่อยอดสำหรับนักเรียนและผู้สนใจ และเหนือสิ่งอื่นใดคือเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะศึกษาต่ออย่างจริงจังในสาขาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้จะนำเสนอเรื่องราวของระบบจำนวนจริง เริ่มต้นตั้งแต่โครงสร้างของระบบจำนวนจริง โดยจะศึกษาวิธีการสร้างระบบจำนวนจริงโดยใช้สัจพจน์และบทนิยามเพียงไม่กี่ข้อ นำไปสู่การสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ เพิ่มขึ้นเป็นลำดับ ส่วนนี้จะครอบคลุมเนื้อหาในบทที่ 1

ต่อจากนั้นในบทที่ 2 จะศึกษาเกี่ยวกับเลขยกกำลัง สมบัติต่างๆ บทนิยาม ตลอดจนทฤษฎีบทที่สำคัญ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลในโอกาสต่อไป

ในบทที่ 3 จะศึกษาเกี่ยวกับการแก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวในรูปแบบต่างๆ และส่งท้ายด้วยบทที่ 4 ซึ่งเป็นส่วนที่ไม่เคยปรากฏในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายมาก่อน คือการประมาณค่าของจำนวนจริง โดยเราจะศึกษาระเบียบวิธีการประมาณค่าของจำนวนจริงแบบต่างๆ ได้แก่ วิธีเฉลี่ย วิธีทางเรขาคณิต วิธีทางแคลคูลัส และการใช้อนุกรมกำลัง เป็นต้น"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

13 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2549

# คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 1

"การปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นครั้งแรก โดยผู้เขียนได้แก้ไขคำอธิบายเนื้อหารวม 3 ประเด็น คือ ประเด็นแรก ได้แก่ การแก้ไขบทนิยาม 3.4 ประเด็นที่สอง ได้แก่ การเพิ่มเติมบทพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 รวมทั้งได้แก้ไขชื่อบทแทรก 3.1 เป็นทฤษฎีบท 3.2 และประเด็นสุดท้าย ได้แก่ การแก้ไขคำอธิบายเนื้อหาในหัวข้อ 4.3 เรื่องการประมาณค่าจำนวนจริงด้วยวิธีทางเรขาคณิตให้มีความชัดเจนและรัดกุมมากยิ่งขึ้น

หวังว่าการแก้ไขปรับปรุงในครั้งนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านบ้างตามสมควร"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

15 พฤษภาคม พ.ศ. 2549

# สารบัญ

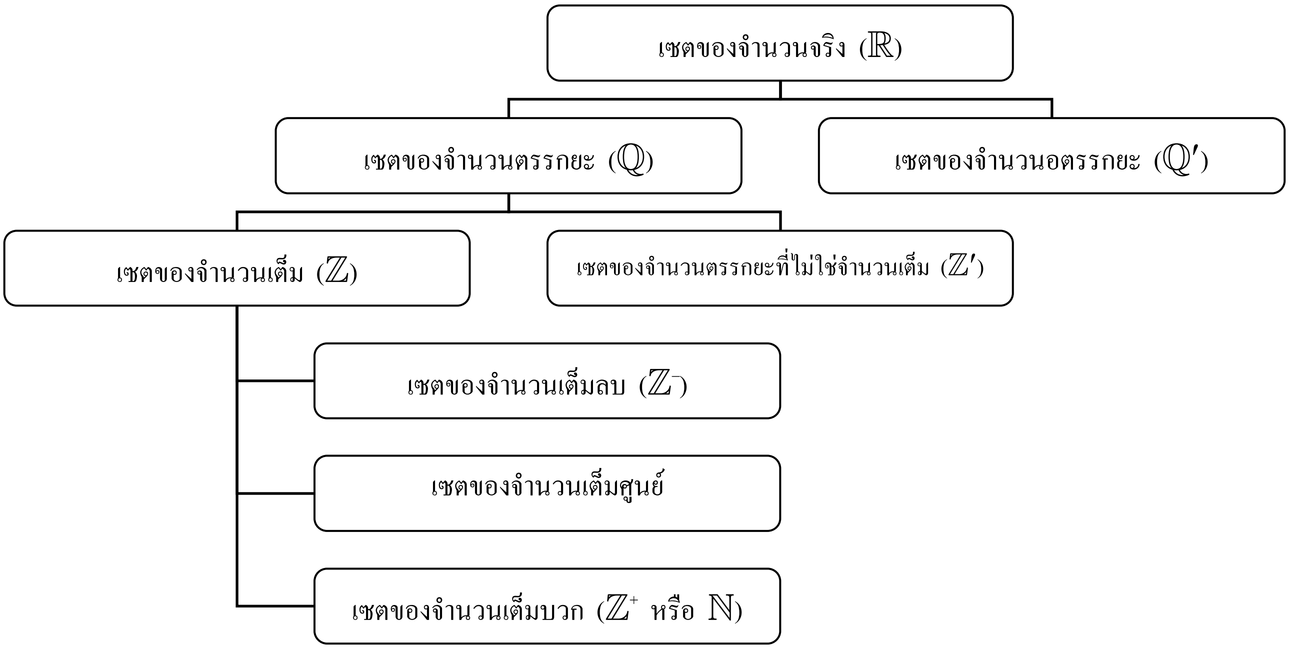

| | | |
|---|---|---|
| **บทที่ 1** | **โครงสร้างของระบบจำนวนจริง** | **1 – 13** |
| | 1.1 แผนผังโครงสร้างของระบบจำนวนจริง | 1 |
| | 1.2 สมบัติของระบบจำนวนจริง | 3 |
| | 1.3 อันดับเชิงเส้นของจำนวนจริง | 10 |
| | 1.4 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง | 12 |
| **บทที่ 2** | **เลขยกกำลัง** | **15 – 18** |
| | 2.1 เลขยกกำลัง | 15 |
| | 2.2 รากอันดับที่ k | 16 |
| **บทที่ 3** | **สมการและอสมการตัวแปรเดียว** | **19 – 33** |
| | 3.1 สมการและอสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร | 19 |
| | 3.2 ช่วง | 21 |
| | 3.3 สมการและอสมการของพหุนามดีกรี n | 23 |
| | 3.4 สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ | 29 |
| **บทที่ 4** | **การประมาณค่าของจำนวนจริง** | **35 – 41** |
| | 4.1 การหารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงบวกด้วยวิธีเฉลี่ย | 35 |
| | 4.2 การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยวิธีทางเรขาคณิต | 37 |
| | 4.3 การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยวิธีแคลคูลัส | 38 |
| | 4.4 การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยอนุกรมกำลัง | 40 |
| **ภาคผนวก** | | **43 – 47** |
| | 1. การหารสังเคราะห์ | 43 |
| | 2. อนุกรมกำลัง (Power Series) | 45 |
| | 3. อนุพันธ์ของฟังก์ชันบางตัว | 47 |
| **บรรณานุกรม** | | **49** |


ʊ ʊ ʊ ʊ ʊ ʊ

# บทที่ 1
# โครงสร้างของระบบจำนวนจริง

## 1.1 แผนผังโครงสร้างของระบบจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริง (Real Number System) เป็นโครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่สำคัญอย่างหนึ่ง ซึ่งถูกสร้างขึ้นโดยอาศัย “สัจพจน์ของปีอาโน” (Peano’s Postulates) ประกอบกับอนิยามศัพท์และบทนิยามอีกจำนวนหนึ่ง โดยเราสามารถแสดงโครงสร้างของระบบจำนวนจริงได้ดังแผนผังต่อไปนี้




**รูป 1.1 แผนภาพของระบบจำนวนจริง**

จากแผนภาพ 1.1 จะเห็นว่าเซตของจำนวนจริงมีสับเซต 2 สับเซต ได้แก่ เซตของจำนวนตรรกยะ กับเซตของจำนวนอตรรกยะ สำหรับเซตของจำนวนตรรกยะมีสับเซต 2 สับเซต ได้แก่ เซตของจำนวนเต็ม กับเซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม และสำหรับเซตของจำนวนเต็มก็ประกอบด้วยสับเซต 3 สับเซต ได้แก่ เซตของจำนวนเต็มลบ เซตของจำนวนเต็มศูนย์ และเซตของจำนวนเต็มบวก

### *1.1.1 จำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ (Rational and irrational numbers)*

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนทั้งหลายที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ และเซตของจำนวนทั้งหลายที่มีสมบัติเช่นนั้นก็จะเรียกว่า “เซตของจำนวนตรรกยะ” นั่นเอง ในขณะที่จำนวนอตรรกยะก็คือ จำนวนทั้งหลายที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้

ตัวอย่างของจำนวนตรรกยะ เช่น $\frac{2}{3}$, $0.\dot{3}$, $5, -1$ เป็นต้น และตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ เช่น $\pi$, e $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{36}$ เป็นต้น

**<u>ข้อสังเกต</u>** จำนวนตรรกยะ อาจกล่าวได้อีกความหมายหนึ่งคือ จำนวนทั้งหลายที่เขียนในรูปทศนิยมได้นั่นเอง

### *1.1.2 จำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม*

จำนวนเต็ม (integers) เป็นสับเซตของเซตของจำนวนตรรกยะที่ประกอบไปด้วยสับเซต 3 สับเซต ได้แก่ เซตของจำนวนเต็มบวก (ตำราบางเล่มใช้คำว่า “จำนวนธรรมชาติ”) เซตของจำนวนเต็มลบ และเซตของจำนวนเต็มศูนย์ เพราะฉะนั้น จำนวนต่อไปนี้จึงเป็นจำนวนเต็ม เช่น $-6, -3, 0, 2, 4$ เป็นต้น

สำหรับเซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ได้แก่ $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -0.6\dot{7}$ เป็นต้น

อนึ่ง สำหรับเซตของจำนวนเต็มมีการศึกษาอย่างละเอียดโดยเฉพาะเรียกว่า “ทฤษฎีจำนวน” ซึ่งผู้เขียนได้กล่าวถึงในหนังสือเรียนออนไลน์ เล่มที่ 4 ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

**หมายเหตุ** ระบบจำนวนจริงสามารถนิยามได้หลายรูปแบบ แต่รูปแบบที่นิยมกันมากก็คือ เริ่มต้นจากการนิยามจำนวนเต็มบวก (จำนวนธรรมชาติ) ด้วยสัจพจน์ของปีอาโน แล้วนิยามจำนวนเต็มว่าเป็นคู่อันดับของจำนวนธรรมชาติ นิยามจำนวนตรรกยะว่าเป็นคู่อันดับของจำนวนเต็ม และในที่สุดก็นิยามจำนวนจริงในรูปของ “ส่วนตัด” (cuts) ซึ่งเป็นสับเซตของเซตของจำนวนตรรกยะ อย่างไรก็ตาม หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้มุ่งเพียงนำเสนอโครงสร้างอย่างสังเขปของระบบจำนวนจริงเท่านั้น จึงขอไม่กล่าวถึงวิธีการสร้างจำนวนแต่ละชนิดดังกล่าว

**แบบฝึกหัด 1.1**

1. จงยกตัวอย่างจำนวนอตรรกยะมาให้ดูอีก 3 จำนวน
2. ท่านคิดว่าจำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนชนิดใด $\pi^e, e^\pi, 2^e$ พร้อมทั้งให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบของท่านด้วย
3. ท่านคิดว่าจำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนชนิดใด $\frac{2}{\pi}, \frac{5}{\pi^e}$ และให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบของท่านด้วย

## 1.2 สมบัติของระบบจำนวนจริง

### *1.2.1 สมบัติพื้นฐาน*

ระบบจำนวนจริงมีสมบัติพื้นฐานดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 1.1** กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1) $\forall a, b \in R,\ a+b \in R$ เรียกว่า มีสมบัติปิดของการบวก

2) $\forall a, b \in R,\ a \cdot b \in R$ เรียกว่า มีสมบัติปิดของการคูณ

3) $\forall a, b, c \in R,\ (a+b)+c = a+(b+c)$ เรียกว่า มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

4) $\forall a, b, c \in R,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ เรียกว่า มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ

5) $\forall a, b \in R,\ a \cdot b = b \cdot a$ เรียกว่า มีสมบัติการสลับที่ของการคูณ

6) $\forall a, b \in R,\ a+b = b+a$ เรียกว่า มีสมบัติการสลับที่ของการบวก

7) $\forall a \in R, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ เรียกว่า มีเอกลักษณ์ของการคูณ

8) $\forall a \in R, a+0 = 0+a = a$ เรียกว่า มีเอกลักษณ์ของการบวก

9) $\forall a \in R, \exists x \in R, a \cdot x = x \cdot a = 1$ เรียกว่า มีผกผันของการคูณ และเรียก x ว่า ตัวผกผันของการคูณ

10) $\forall a \in R, \exists y \in R, a+y = y+a = 0$ เรียกว่า มีผกผันของการบวก และเรียก y ว่า ตัวผกผันของการบวก

สมบัติทั้ง 10 ข้อในบทนิยาม 1.1 เป็นสมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง ซึ่งจะขาดข้อใดข้อหนึ่งไปไม่ได้เลย

### *1.2.2 สมบัติไตรวิภาคของจำนวนจริง*

**สัจพจน์ 1.1**
กำหนดให้ $x$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อใดข้อหนึ่งเท่านั้น

1) $x \in R^{+}$
2) $x = 0$
3) $x \in R^{-}$

สัจพจน์ 1.1 นี้เรียกว่า "สมบัติไตรวิภาคของจำนวนจริง" (Trichotomy property of real numbers) โดยเราอาจเขียนสัจพจน์ 1.1 ใหม่ได้ดังนี้ กำหนดให้ $x, y$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อใดข้อหนึ่งเท่านั้น

1) $x < y$
2) $x = y$
3) $y < x$

### *1.2.3 สัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริง*

**บทนิยาม 1.2**
กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ $a, b, a', b' \in R$ จะกล่าวว่า

1) a เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของ S ก็ต่อเมื่อ $x \leq a$ สำหรับทุก $x \in S$
2) b เป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของ S ก็ต่อเมื่อ $b \leq x$ สำหรับทุก $x \in S$

และสำหรับ $a', b' \in S$ จะกล่าวว่า

1) $a'$ เป็นขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound) ของ S (เขียนแทนด้วย l.u.b S หรือ sup S) ก็ต่อเมื่อ $a' \leq a$ เมื่อ $a$ เป็นขอบเขตบนของ S
2) $b'$ เป็นขอบเขตล่างมากสุด (greatest lower bound) ของ S (เขียนแทนด้วย g.l.b S หรือ inf S) ก็ต่อเมื่อ $b \leq b'$ เมื่อ $b$ เป็นขอบเขตล่างของ S

**ตัวอย่างที่ 1.1** กำหนดให้ $A = \{x \mid |x^2 - 1| \leq 8\}$ จงหาค่าขอบเขตบนและค่าขอบเขตล่างของ A (ถ้ามี)

**วิธีทำ** พิจารณาอสมการ $|x^2 - 1| \leq 8$

จะได้ว่า $-8 \leq x^2 - 1 \leq 8$

ดังนั้น $-7 \leq x^2 \leq 9$

แบ่งได้ 2 อสมการย่อยๆ คือ

1) $-7 \leq x^2$ คำตอบของอสมการนี้ คือ จำนวนจริงใดๆ $(x \in R)$

2) $x^2 \leq 9$ คำตอบของอสมการนี้ คือ $-3 \leq x \leq 3$

เพราะฉะนั้น คำตอบของอสมการ คือ $-3 \leq x \leq 3$

นั่นคือ $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

จะเห็นว่า $y \leq 3,\ y < 4,\ y < 5,\ \ldots$ สำหรับทุก $y \in A$ เพราะฉะนั้น ค่าขอบเขตบนของ A คือ ทุกๆ จำนวนจริง y ซึ่ง $y \geq 3$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ค่าขอบเขตล่างของ A คือ ทุกๆ จำนวนจริง z ซึ่ง $z \leq -3$ ❑

**หมายเหตุ** ผู้อ่านสามารถศึกษาเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ได้ในหัวข้อ 1.5

**บทนิยาม 1.3**
กำหนดให้ $S \subseteq R$ จะกล่าวว่า S เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set) ก็ต่อเมื่อ S มีขอบเขตล่างและขอบเขตบน

**ตัวอย่างที่ 1.2** เซต A ในตัวอย่างที่ 1.1 คือ เซตมีขอบเขต ❑

**ตัวอย่างที่ 1.3** กำหนดให้ $B = \{x \mid x > 0\}$ จงพิจารณาว่า B เป็นเซตมีขอบเขตหรือไม่

**วิธีทำ** จาก $x > 0$ จะเห็นได้ชัดว่า B มีขอบเขตล่าง (คืออะไร?) แต่ไม่มีขอบเขตบน เพราะฉะนั้น โดยบทนิยาม 1.3 จะได้ว่า B ไม่เป็นเซตมีขอบเขต ❑

**<u>หมายเหตุ</u>** ในกรณีที่เซต A ที่กำหนดให้ไม่มีขอบเขตบน เรากล่าวว่า $\sup A = \infty$ และในกรณีที่เซต A เป็นเซตว่าง เรากล่าวว่า $\sup A = -\infty$ ในทางกลับกัน ในกรณีที่เซต A ที่กำหนดให้ไม่มีขอบเขตล่างจะกล่าวว่า $\inf A = -\infty$ และในกรณีที่เซต A เป็นเซตว่างจะกล่าวว่า $\inf A = \infty$

ที่ผ่านไปแล้ว เป็นการให้ความหมายของขอบเขตของเซตตลอดจนอธิบายลักษณะของเซตที่มีขอบเขต ต่อไปนี้จะเป็นสัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริง

**สัจพจน์ 1.2**
กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \phi$ ถ้า S มีขอบเขตบนแล้ว S จะมีขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

ในทำนองเดียวกับขอบเขตบน ถ้าเราทราบว่าเซต $S \subseteq R$ มีขอบเขตล่างแล้ว S ย่อมมีขอบเขตล่างมากสุดด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1.1**
กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \phi$ ถ้า S มีขอบเขตล่างแล้ว S จะมีขอบเขตล่างมากสุดเสมอ

**พิสูจน์** กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \phi$

สมมติว่า y เป็นขอบเขตล่างของ S จะได้ว่า $y \leq s$ สำหรับทุก $s \in S$

กำหนดให้ $T = \{y \mid y \text{ เป็นขอบเขตล่างของ } S\}$

โดยสัจพจน์ 1.2 จะได้ว่า $t = \sup T$

จะต้องแสดงว่า $t = \inf S$

1) ให้ $s \in S$

จะได้ว่า s เป็นขอบเขตบนของ T

นั่นคือ $t \leq s$ ทุกๆ $t \in T$

2) ให้ $y'$ เป็นขอบเขตล่างของ S

ดังนั้น $y' \in T$

จะได้ว่า $y' \leq t$

จาก 1) และ 2) จึงได้ว่า S มีขอบเขตล่างมากสุด ❑

ต่อไปนี้จะเป็นทฤษฎีบทที่น่าสนใจเกี่ยวกับค่าขอบเขตบนน้อยสุดและค่าขอบเขตล่างมากสุดของเซตของจำนวนจริง

**ทฤษฎีบท 1.2**
กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ S เป็นเซตมีขอบเขตแล้ว $S \neq \phi$ ก็ต่อเมื่อ $\inf S \leq \sup S$

**พิสูจน์** $(\Rightarrow)$ กำหนดให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \phi$

ให้ $s \in S$

เนื่องจาก S เป็นเซตมีขอบเขต

ดังนั้น โดยสัจพจน์ 1.2 จะได้ว่า $s \leq \sup S$

และโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า $\inf S \leq s$

จะเห็นได้ชัดว่า $\inf S \leq \sup S$

$(\Leftarrow)$ สมมติว่า $\inf S \leq \sup S$ และ $S = \phi$

เนื่องจาก $S = \phi$

ดังนั้น $\sup S = -\infty$ และ $\inf S = \infty$

จะเห็นว่า $\sup S < \inf S$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $S \neq \phi$ ❑

ทฤษฎีบท 1.2 ยืนยันว่าสำหรับสับเซตใดๆ ของเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นเซตว่าง และเป็นเซตมีขอบเขตแล้ว ค่าขอบเขตล่างมากสุดย่อมมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

**ทฤษฎีบท 1.3**

กำหนดให้ $S \subseteq R$ โดยที่ $S \neq \phi$ และ $S$ เป็นเซตมีขอบเขต นิยาม $-S = \{-s \mid s \in S\}$

จะได้ว่า $\sup(-S) = -\inf S$

**พิสูจน์** กำหนดให้ $S \subseteq R$ โดยที่ $S \neq \phi$ และ $S$ เป็นเซตมีขอบเขต นิยาม $-S = \{-s \mid s \in S\}$

เพื่อความสะดวก สมมติให้ $s' = \sup(-S)$ จะต้องแสดงว่า $\inf S = -s'$

ให้ $x \in -S$

จาก $s' = \sup(-S)$

จะได้ว่า $x \leq s'$

ดังนั้น $-s' \leq -x$

แสดงว่า $-s'$ เป็นขอบเขตล่างของ $S$

ต่อไปสมมติให้ $s$ เป็นขอบเขตล่างของ $S$

ดังนั้น $s \leq y$ สำหรับทุก $y \in S$

จะได้ว่า $-y \leq -s$ สำหรับทุก $y \in S$

ดังนั้น $-s$ เป็นขอบเขตบนของ $-S$

จะได้ว่า $s' \leq -s$ นั่นคือ $s \leq -s'$

เพราะฉะนั้น $\sup(-S) = -\inf S$ ❑

**ตัวอย่างที่ 1.4** กำหนดให้ $S = \{x \in R \mid -3 < x < 1\}$ จงหาค่าต่างๆ ดังต่อไปนี้

1) ค่าขอบเขตบนและค่าขอบเขตล่างของ $S$
2) $\sup S$ และ $\inf S$ (ถ้ามี)
3) $\sup(-S)$

**วิธีทำ**

1) ขอบเขตบน คือ $\{x \mid x \geq 1\}$ และขอบเขตล่าง คือ $\{x \mid x \leq -3\}$
2) $\sup S = 1$ และ $\inf S = -3$
3) โดยทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่า $\sup(-S) = -(-3) = 3$ ❑

**ทฤษฎีบท 1.4**

กำหนดให้ $S \subseteq R$ โดยที่ $S \neq \phi$ และ $S$ เป็นเซตมีขอบเขต สำหรับ $a \in R$ นิยาม $aS = \{as \mid s \in S\}$ จะได้ว่า

1) $\inf(aS) = a \inf S$

2) $\sup(aS) = a \sup S$

**พิสูจน์** กำหนดให้ $S \subseteq R$ โดยที่ $S \neq \phi$ และ $S$ เป็นเซตมีขอบเขต

สำหรับ $a \in R$ นิยาม $aS = \{as \mid s \in S\}$

1) ต้องการแสดงว่า $\inf(aS) = a \inf S$

*กรณี $a = 0$*

จะได้ว่า $aS = \{0 \cdot s \mid s \in S\} = \{0 \mid s \in S\}$

จะเห็นได้ชัดว่าขอบเขตล่างของ $aS$ คือ $\{x \mid x \leq 0\}$

ดังนั้น $\inf(aS) = 0$ และ $a \inf S = 0 \cdot \inf S = 0 = \inf(aS)$

*กรณี $a \neq 0$*

โดยทฤษฎีบท 1.1 $S$ จะมี $\inf S$

ดังนั้น สำหรับทุกๆ $s \in S$ จะได้ว่า $\inf S \leq s$ ดังนั้น $a \inf S \leq as$

เพราะฉะนั้น $a \inf S$ เป็นขอบเขตล่างของ $aS$

ต่อไปสมมติให้ $c \in R$ เป็นขอบเขตล่างของ $aS$

ดังนั้น $c \leq as$ สำหรับทุก $s \in S$

เนื่องจาก $a \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{c}{a} \leq s$ สำหรับทุก $s \in S$

ดังนั้น $\frac{c}{a}$ เป็นขอบเขตล่างของ $S$

จะได้ว่า $\frac{c}{a} \leq \inf S$ นั่นคือ $c \leq a \inf S$

2) ต้องการแสดงว่า $\sup(aS) = a \sup S$

ให้ผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด ❑

**ทฤษฎีบท 1.5**

กำหนดให้ $S, T \subseteq R$ โดยที่ $S, T \neq \phi$ และ $S, T$ เป็นเซตมีขอบเขต

นิยาม $S + T = \{s + t \mid s \in S \text{ และ } t \in T\}$ แล้วจะได้ว่า

1) $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$

2) $\inf(S + T) = \inf S + \inf T$

**พิสูจน์** กำหนดให้ $S, T \subseteq R$ โดยที่ $S, T \neq \phi$ และ $S, T$ เป็นเซตมีขอบเขต

1) ให้ $s \in S,\ t \in T$

โดยสัจพจน์ 1.2 จะมี sup S, sup T

ดังนั้น $s \leq \sup S$ และ $t \leq \sup T$

จะได้ $s + t \leq \sup S + \sup T$

ดังนั้น $\sup S + \sup T$ เป็นขอบเขตบนของ $S + T$

ต่อไปสมมติให้ $x \in R$ เป็นขอบเขตบนของ $S + T$

ดังนั้น สำหรับทุกๆ $s \in S$ และ $t \in T$ จะได้ว่า $s + t \leq x$

จะได้ $s \leq x - t$ สำหรับทุกๆ $s \in S$ ดังนั้น $x - t$ เป็นขอบเขตบนของ S

จะได้ว่า $\sup S \leq x - t$

ดังนั้น $t \leq x - \sup S$ สำหรับทุกๆ $t \in T$ ดังนั้น $x - \sup S$ เป็นขอบเขตบนของ T

จะได้ว่า $\sup T \leq x - \sup S$

นั่นคือ $\sup S + \sup T \leq x$

เพราะฉะนั้น $\sup (S + T) = \sup S + \sup T$

2) พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด ❑

**ทฤษฎีบท 1.6** กำหนดให้ $S, T \subseteq R$ โดยที่ $S, T \neq \phi$ และ S, T เป็นเซตมีขอบเขตแล้ว
$\sup (S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$

**พิสูจน์** กำหนดให้ $S, T \subseteq R$ และ $S, T \neq \phi$ และ S, T เป็นเซตมีขอบเขต

เพื่อความสะดวก สมมติให้ $M = \max\{\sup S, \sup T\}$ จะต้องแสดงว่า

1) $\forall x \in S \cup T,\ x \leq M$

2) $\forall y \in R$, (y เป็นขอบเขตบนของ $S \cup T \Rightarrow M \leq y$)

ให้ $x \in S \cup T$

ดังนั้น $x \in S$ หรือ $x \in T$

เนื่องจาก S, T เป็นเซตมีขอบเขต ดังนั้น โดยสัจพจน์ 1.2 จะได้ว่า $x \leq \sup S$ หรือ $x \leq \sup T$

ดังนั้น $x \leq \max\{\sup S, \sup T\} = M$

ต่อไปสมมติให้ $y \in R$ และ y เป็นขอบเขตบนของ $S \cup T$

เพราะว่า y เป็นขอบเขตบนของ $S \cup T$ ดังนั้น $y \geq z$ ทุก $z \in S \cup T$

ถ้า $z \in S$ แล้ว $y \geq \sup S \geq z$ หรือถ้า $z \in T$ แล้ว $y \geq \sup T \geq z$

ดังนั้น $y \geq \max\{\sup S, \sup T\} = M$

เพราะฉะนั้น $\sup (S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$ ❑

## แบบฝึกหัด 1.2

1. กำหนดให้ $S = \{y \mid 0 < y \leq 3\}$ จงหาค่า sup S และให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบของท่านด้วย
2. จงแสดงว่าเซต S ในข้อ 1 เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.4 (2) และทฤษฎีบท 1.5 (2)
4. กำหนดให้ $S, T \subseteq R$ โดยที่ $S, T \neq \phi$ และ S, T เป็นเซตมีขอบเขต จงแสดงว่า
   1) ถ้า $S \subseteq T$ แล้ว $\sup S \leq \sup T$
   2) $\sup (S \cap T) \leq \min\{\sup S, \sup T\}$

## 1.3 อันดับเชิงเส้นของจำนวนจริง

**บทนิยาม 1.4**
กำหนดให้ $a, b \in R$ จะกล่าวว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b - a \in R^+$

จากบทนิยาม 1.4 เราจะเรียกเครื่องหมาย "$<$" ว่า "น้อยกว่า" และอ่านนิพจน์ $a < b$ ว่า "a น้อยกว่า b" ซึ่งมีความหมายเหมือนกับนิพจน์ $b > a$ โดยเราเรียกเครื่องหมาย "$>$" ว่า "มากกว่า" ซึ่งมีสมบัติที่สำคัญดังนี้

**ทฤษฎีบท 1.7** กำหนดให้ $a, b, c \in R$
1) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
2) ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
3) ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

**พิสูจน์** กำหนดให้ $a, b, c \in R$

1) ($\Rightarrow$) จะแสดงว่า $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
สมมติให้ $a < b$ โดยบทนิยาม 1.5 จะได้ว่า $b - a \in R^+$
เนื่องจาก $b - a = (b + c) - (a + c) \in R^+$
แสดงว่า $a + c < b + c$

($\Leftarrow$) จะแสดงว่า $a + c < b + c \Rightarrow a < b$
สมมติให้ $a + c < b + c$ โดยบทนิยาม 1.5 จะได้ว่า $(b + c) - (a + c) \in R^+$
เนื่องจาก $(b + c) - (a + c) = (b - a) + c - c = b - a \in R^+$
จะได้ว่า $a < b$

2) สมมติว่า $a < b$ และ $c > 0$

โดยบทนิยาม 1.5 จะได้ว่า $b - a \in R^+$

ดังนั้น $c(b - a) = cb - ca = bc - ac \in R^+$

นั่นคือ $ac < bc$

3) สมมติว่า $a < b$ และ $c < 0$

โดยบทนิยาม 1.5 จะได้ว่า $b - a \in R^+$

ให้ $c < 0$ ดังนั้น $-c > 0$

จะได้ว่า $-c(b - a) = -bc + ac = ac - bc \in R^+$

นั่นคือ $ac > bc$ ❑

**แบบฝึกหัด 1.3**

กำหนดให้ $a, b, c \in R$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $-b < -a$
3. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$
4. ถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < 0$
5. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
6. $a \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $a^2 > 0$

## 1.4 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (Absolute value of real number)

**บทนิยาม 1.5**

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ โดยที่

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

**<u>ข้อสังเกต</u>** จากบทนิยาม 1.5 หากเราพิจารณาในแง่ของเรขาคณิตแล้วจะพบว่า ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x ใดๆ ก็คือ ระยะห่างจาก 0 ไปยังจำนวนจริง x บนเส้นจำนวนจริงนั่นเอง

**บทนิยาม 1.6**

สำหรับ $a > 0$ และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1) $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
2) $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
3) $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$
4) $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

บทนิยาม 1.6 เราจะนำไปใช้ในการแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ตลอดจนอสมการของพหุนามดีกรี n ในบทถัดไปด้วย จึงขอให้ผู้อ่านทำความเข้าใจและจดจำในรายละเอียดให้ถี่ถ้วน

อนึ่ง ค่าสัมบูรณ์มีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1.8** กำหนดให้ $x, y$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า

1) $|x| = |-x|$
2) $|x||y| = |xy|$
3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ เรียกว่า "อสมการรูปสามเหลี่ยม" (Triangle Inequality)
5) $||x| - |y|| \leq |x-y|$ เรียกว่า "อสมการรูปสามเหลี่ยมย้อนกลับ" (Backward Triangle Inequlaity)

**พิสูจน์** กำหนดให้ $x, y$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

1) กรณี $x \geq 0$ จะได้ว่า $|x| = x$ และ $|-x| = -(-x) = x$ เพราะฉะนั้น $|x| = |-x|$
กรณี $x < 0$ จะได้ว่า $|x| = -x$ และ $|-x| = -x$ เพราะฉะนั้น $|x| = |-x|$
จากทั้งสองกรณีจึงได้ว่า $|x| = |-x|$

ข้อที่ยังไม่ได้พิสูจน์ ให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด ❑

**แบบฝึกหัด 1.4**

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.8 ข้อที่เหลือเป็นจริง
2. กำหนดให้ $x$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า $-|x| \leq x \leq |x|$
3. กำหนดให้ $x, y$ เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบของท่านด้วย
   1) $\left|\frac{1}{x}\right| = |x^{-1}| = |x|^{-1}$
   2) $|x-y| = |y-x|$

# บทที่ 2

# เลขยกกำลัง

## 2.1 เลขยกกำลัง

**บทนิยาม 2.1**

เลขยกกำลัง (exponent) คือ จำนวนที่เขียนในรูป $a^n$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $a^n$ มีความหมายว่า การคูณจำนวนจริง a ทั้งหมด n ตัว เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$$

### *2.1.1 สมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลัง*

เลขยกกำลังมีสมบัติพื้นฐานดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.1** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

2) $(a^m)^n = a^{mn}$

3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด และต่อไปนี้จะสร้างบทแทรกซึ่งเป็นผลจากทฤษฎีบท 2.1

**บทแทรก 2.1**

1) $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

2) $a^0 = 1$

บทแทรก 2.1 สามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายดาย ขอให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

**แบบฝึกหัด 2.1**

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 2.1 เป็นจริง
2. จงแสดงว่าบทแทรก 2.1 เป็นจริง
3. จงให้เหตุผลเพื่อแสดงว่า $0^0$ ไม่สามารถหาค่าได้

## 2.2 รากอันดับที่ k

เราเคยทราบมาแล้วว่ารากที่สองของ 36 มีทั้งหมด 2 ค่า ได้แก่ 6 กับ –6 ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณารากอันดับที่ k สำหรับ k = 3, 4, 5, … แต่ก่อนอื่นจะขอให้บทนิยามบางประการดังนี้

**บทนิยาม 2.2**

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m, k เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$ โดยที่นิพจน์ $\sqrt[k]{a^m}$ อ่านว่า "รากอันดับที่ k ของ $a^m$"

ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เราได้เคยพิจารณาสมบัติของรากที่สองมาแล้ว ซึ่งสมบัติของรากที่ k ก็ยังคงคล้ายคลึงกับกรณีของรากที่สองเช่นเคย สามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.2** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก และ m, n, k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ $k > 2$ แล้ว

1) $\sqrt[k]{a^m} \cdot \sqrt[k]{a^n} = \sqrt[k]{a^{m+n}}$

2) $\sqrt[k]{a^m} \cdot \sqrt[k]{b^m} = \sqrt[k]{(a \cdot b)^m}$

3) $\dfrac{\sqrt[k]{a^m}}{\sqrt[k]{b^m}} = \sqrt[k]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ เมื่อ $b \neq 0$

**ตัวอย่างที่ 2.1** จงเขียนนิพจน์ $\sqrt[3]{27^4}$ ในรูปอย่างง่าย

**วิธีทำ** โดยบทนิยาม 2.2 จะได้ว่า

$$\sqrt[3]{27^4} = 27^{\frac{4}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[3]{27^4} = 81$ ❑

**ตัวอย่างที่ 2.2** จงเขียนนิพจน์ $\sqrt[3]{-343}$ ในรูปอย่างง่าย

**วิธีทำ** โดยบทนิยาม 2.2 จะได้ว่า

$$\sqrt[3]{-343} = (-343)^{\frac{1}{3}} = \left((-7)^3\right)^{\frac{1}{3}} = -7$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[3]{-343} = -7$ ❑

**ตัวอย่างที่ 2.3** จงหาค่าของ $\dfrac{\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{216} - \sqrt[4]{16}}$

**วิธีทำ** จาก

$$\frac{\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{216} - \sqrt[4]{16}} = \frac{64^{\frac{1}{6}} + 343^{\frac{1}{3}}}{216^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} + \left(7^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(6^3\right)^{\frac{1}{3}} - \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{2+7}{6-2} = \frac{9}{4}$$

จะได้ว่า $\dfrac{\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{216} - \sqrt[4]{16}} = \dfrac{9}{4}$ ❑

**ตัวอย่างที่ 2.4** จงทำให้นิพจน์ $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}$ ไม่อยู่ในรูปที่ตัวส่วนติดกรณฑ์

**วิธีทำ** จาก $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}$ คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} &= \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+b}\right)}{\left(\sqrt{a+b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+b}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{(a-b)\cdot(a+b)}}{\sqrt{(a+b)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|}
\end{aligned}$$
❑

**ตัวอย่างที่ 2.5** กำหนดให้ $a = 6,\ b = 3$ จงหาค่าของ $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$

**วิธีทำ** ให้ $x^3 = a = 6$ และให้ $y^3 = b = 3$

จะได้ว่า $x = a^{\frac{1}{3}},\ y = b^{\frac{1}{3}}$

ดังนั้น จาก
$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\
6-3 &= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) \\
3 &= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(6^{\frac{2}{3}} + 18^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}$$

นั่นคือ $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{6^{\frac{2}{3}} + 18^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}}$ ❑

## แบบฝึกหัด 2.2

จงแสดงว่าทฤษฎีบท 2.2 เป็นจริง

# บทที่ 3

# สมการและอสมการตัวแปรเดียว

## 3.1 สมการและอสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร

### *3.1.1 สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร*

**บทนิยาม 3.1**

สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร คือ สมการที่อยู่ในรูป $ax + b = 0$ เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$

จากบทนิยาม 3.1 สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรที่มีรูปแบบคือ $ax + b = 0$ ถ้าบวกทั้งสองข้างของสมการด้วย $-b$ แล้วจะได้ $ax + b + (-b) = ax + 0 = -b \Rightarrow ax = -b$

จากนั้นนำ $a$ หารตลอดสมการได้ $x = -\frac{b}{a}$ เป็นคำตอบของสมการ

**ตัวอย่างที่ 3.1** จงหาคำตอบของสมการ $3x + 1 = \frac{x}{2} + 3$

**วิธีทำ** จากสมการ $3x + 1 = \frac{x}{2} + 3$

บวกทั้งสองข้างของสมการด้วย $-\frac{x}{2}$ ได้ $3x - \frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 3 - \frac{x}{2} = 3$

บวกทั้งสองข้างของสมการด้วย $-1$ ได้ $3x - \frac{x}{2} + 1 - 1 = 3 - 1 = 2$

ดังนั้น จะได้ว่า $3x - \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow \frac{2(3x) - x}{2} = 2$

คูณตลอดสมการด้วย 2 ได้ $2(3x) - x = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 6x - x = 4$

ได้ $5x = 4 \Rightarrow$ หารตลอดสมการด้วย 5 ได้ $x = \frac{4}{5}$

ตรวจคำตอบ: $3\left(\frac{4}{5}\right) + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right) + 3$

$\frac{12}{5} + 1 = \frac{2}{5} + 3$

$\frac{17}{5} = \frac{17}{5}$ จริง

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ $x = \frac{4}{5}$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.2** จงหาคำตอบของสมการ $1 - x = x + 3$

**วิธีทำ** จากสมการโจทย์ $1 - x = x + 3$

บวกทั้งสองข้างของสมการด้วย $-x$ ได้ $1 - 2x = 3$

บวกทั้งสองข้างของสมการด้วย $-1$ ได้ $-2x = 2$

หารตลอดสมการด้วย $-2$ ได้ $x = -1$

ตรวจคำตอบ: $1 - (-1) = (-1) + 3$

$2 = 2$ จริง

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ $x = -1$ ❑

### *3.1.2 อสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร*

**บทนิยาม 3.2** อสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร หมายถึง อสมการในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

1) $ax + b < 0$
2) $ax + b > 0$
3) $ax + b \geq 0$
4) $ax + b \leq 0$
5) $ax + b \neq 0$

เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$

การแก้อสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร ก็มีหลักการคล้ายคลึงกับการแก้สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร กล่าวคือ พยายามกำจัดค่าคงที่ให้หมดไปให้เหลือไว้แต่ตัวแปรที่ต้องการหาค่า แต่อย่างไรก็ตาม มีข้อควรระวังก็คือ การคูณหรือหารค่าคงที่ใดๆ ที่คูณอยู่กับตัวแปรด้วยค่าคงที่อีกค่าหนึ่งที่ไม่เท่ากับศูนย์ ถ้าค่าคงที่นั้นน้อยกว่าศูนย์แล้ว เครื่องหมายอสมการจะเปลี่ยนกลับไปเป็นตรงกันข้าม พิจารณาจากตัวอย่างต่างๆ ดังต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 3.3** จงหาคำตอบของอสมการ $3x + 2 \geq 4x + 5$

**วิธีทำ** จากสมการ $3x + 2 \geq 4x + 5$

บวกทั้งสองข้างของอสมการด้วย $-2$ ได้ $3x \geq 4x + 3$

บวกทั้งสองข้างของอสมการด้วย $-4x$ ได้ $-x \geq 3$

คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย $-1$ ได้ $x \leq -3$

เพราะฉะนั้น คำตอบของอสมการคือ $x \leq -3$ หรือเขียนเป็นเซตได้ว่า $\{x \mid x \leq -3\}$ ❑

การแก้อสมการที่มีเครื่องหมาย “$\neq$” วิธีการที่ง่ายที่สุดก็คือ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายจาก “$\neq$” ไปเป็น “=” จากนั้นดำเนินการแก้สมการนั้นเสมือนหนึ่งว่าเป็นอสมการ และเมื่อจะตอบให้เปลี่ยนกลับไปเป็นเครื่องหมาย “$\neq$” ตามเดิม พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 3.4** จงหาคำตอบของอสมการ $4x + 1 \neq x - 1$

**วิธีทำ** จากอสมการที่กำหนดให้ เปลี่ยนจากเครื่องหมาย “$\neq$” ไปเป็นเครื่องหมาย “=” จะได้ว่า

$$4x + 1 = x - 1$$

$$4x - x = -1 - 1$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

เพราะฉะนั้น คำตอบของอสมการคือ $x \neq -\frac{2}{3}$ ❑

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

## 3.2 ช่วง (Interval)

**บทนิยาม 3.3** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a < b$ แล้ว

1) $a < x < b$ หมายถึง เซต $(a, b)$ เรียกว่า ช่วงเปิด
2) $a < x \leq b$ หมายถึง เซต $(a, b]$ เรียกว่า ช่วงกึ่งเปิดทางซ้าย
3) $a \leq x \leq b$ หมายถึง เซต $[a, b]$ เรียกว่า ช่วงปิด
4) $a \leq x < b$ หมายถึง เซต $[a, b)$ เรียกว่า ช่วงกึ่งเปิดทางขวา
5) $x > a$ หมายถึง เซต $(a, \infty)$
6) $x \geq a$ หมายถึง เซต $[a, \infty)$
7) $x < a$ หมายถึง เซต $(-\infty, a)$
8) $x \leq a$ หมายถึง เซต $(-\infty, a]$
9) $-\infty < x < \infty$ หมายถึง เซต $(-\infty, \infty)$ เรียกว่า ช่วงอนันต์ หรือในระดับนี้ก็คือเซตของจำนวนจริงนั่นเอง

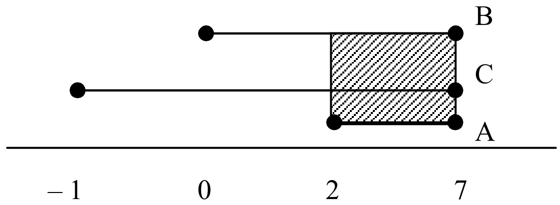
<u>**หมายเหตุ**</u> ข้อ 5 – 8 เรียกว่า ช่วงกึ่งอนันต์

**ตัวอย่างที่ 3.5** กำหนดให้ $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 6\}$ จงเขียนเซต A ในรูปของช่วง

**วิธีทำ** เนื่องจากเซตที่กำหนดให้ เข้าเงื่อนไขตามบทนิยาม 3.3 (3) แสดงว่าเป็นช่วงปิด ซึ่งเขียนแทนเซต A ด้วยช่วงได้ $A = [-1, 6]$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.6** กำหนดให้ $A = [2, 7]$, $B = [0, 7]$, $C = [-1, 7]$ จงหาค่าของ $n((A \cap B) - C)$

**วิธีทำ** เนื่องจากโจทย์กำหนดเซตมาในรูปของช่วง เพื่อความสะดวกเราอาจเขียนช่วงในรูปของเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้




จาก $n((A \cap B) - C) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$ -----(1)

เนื่องจาก $n(A \cap B) = n([2, 7]) = 6$

และ $n(A \cap B \cap C) = n([2, 7]) = 6$

เพราะฉะนั้น จากสมการ (1) จึงได้ว่า $n((A \cap B) - C) = 6 - 6 = 0$

อนึ่ง เราสามารถตรวจสอบคำตอบได้อย่างง่ายดาย โดยการเขียนช่วงในรูปของเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

จะได้ว่า $A \cap B = A$ (เพราะว่า $A \subseteq B$)

ดังนั้น $(A \cap B) - C$ จึงอาจลดรูปได้เป็น $A - C$

จึงพิจารณาเพียง $A - C$ ก็เพียงพอ แต่เนื่องจากว่า $A \subseteq C$ แสดงว่า $n(A) = n(A \cap C)$

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 0$ ❑

## แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนช่วงเพื่อแสดงคำตอบของอสมการในตัวอย่างที่ 3.3 และตัวอย่างที่ 3.4

☙ ☙ ☙ ☙ ☙ ☙

## 3.3 สมการและอสมการของพหุนามดีกรี n

### *3.3.1 สมการพหุนามดีกรี n*

**บทนิยาม 3.4**
พหุนามดีกรี n กำหนดด้วย $P_n(x)$ และ $n \geq 2$ หมายถึง พหุนามที่อยู่ในรูป $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a_n \neq 0$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของพหุนาม

จะเห็นได้ว่า จากบทนิยาม 3.4 สมการพหุนามดีกรี n ที่เราจะหาคำตอบนั้นจะต้องอยู่ในรูป $P_n(x) = 0$ เสมอ และการแก้สมการพหุนามในลักษณะนี้ หากพหุนามที่เรากำลังพิจารณาอยู่นั้นสามารถแยกตัวประกอบได้ก็ใช้การแยกตัวประกอบ แล้วใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวว่า ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $ab = 0$ แล้วจะได้ว่า $a = 0$ หรือ $b = 0$ หาคำตอบของสมการพหุนามต่อไป ขอให้ผู้อ่านพิจารณาจากตัวอย่างต่างๆ ดังนี้

**ตัวอย่างที่ 3.7** จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$

**วิธีทำ** เนื่องจากสมการพหุนามที่โจทย์กำหนดให้เป็นพหุนามดีกรีสอง และใช้การแยกตัวประกอบได้

จะได้ว่า $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = 0$

ดังนั้น $x = 3$ หรือ $x = 2$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ $x = 2$ หรือ $x = 3$ ❑

<u>**หมายเหตุ**</u> ผู้เขียนขอละการตรวจสอบคำตอบไว้เพื่อความกระชับ ซึ่งผู้อ่านสามารถตรวจสอบคำตอบได้ด้วยตนเองอย่างง่ายดาย

**ตัวอย่างที่ 3.8** จงหาคำตอบของสมการ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

**วิธีทำ** จาก
$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x^3 + 2x^2) - (x+2) \\ &= x^2(x+2) - (x+2) \\ &= (x+2)(x^2-1) \\ &= (x+2)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(x+2)(x-1)(x+1) = 0$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการคือ $x = -2$ หรือ $x = -1$ หรือ $x = 1$ ❑

อนึ่ง ในกรณีที่พหุนามที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นแยกตัวประกอบได้ยาก เราอาจใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือมาปรับใช้ในการแยกตัวประกอบได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.1** ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem or Residue Theorem)
กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n$ ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$ แล้วจะได้ว่าเศษเหลือจากการหารเท่ากับ $P(c)$

**พิสูจน์** ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n$ และ $x - c$ เป็นพหุนาม

โดยขั้นตอนวิธีหารจะได้ว่า $P(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$ -----(3.3.1)

เมื่อ $P_{n-1}(x)$ คือ พหุนามดีกรี $n - 1$ และ $R_{n-1}(x)$ คือ เศษที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$

แทนค่า $x = c$ ลงในสมการ (3.3.1) จะได้ว่า $P(c) = 0 + R_{n-1}(c) = R_{n-1}(c)$ -----(3.3.2)

ดังนั้น เศษจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - c$ มีค่าเท่ากับ $P(c)$ ตามต้องการ ❑

ผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1 เราจะได้ทฤษฎีบท 3.2 ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2** ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ (Rational Factor Theorem)
กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n$ จะได้ว่า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

**พิสูจน์** กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n$

($\Rightarrow$) สมมติว่า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

จะได้ว่า $P(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$

เนื่องจาก $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ จะได้ว่า

$P(x) = (x - c)P_{n-1}(x)$

ดังนั้น $P(c) = (c - c)P_{n-1}(x) = 0$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $P(c) = 0$

โดยขั้นตอนวิธีการหาร จะได้ว่า $P(x) = (x - c)Q(x) + R_{n-1}(x)$

จากทฤษฎีบท 3.1 เราทราบว่า $P(c) = R_{n-1}(x)$

ดังนั้น $P(x) = (x - c)Q(x)$

แสดงว่า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.9** กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 6$ เป็นพหุนามดีกรีสาม สำหรับ $P(x)$ ที่กำหนดให้นี้ จงหาเศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 3$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าเศษจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$ จะเท่ากับ $P(c)$

ดังนั้น ให้ $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

จะได้ว่า เศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 3$ จะเท่ากับ $P(-3)$

เพราะฉะนั้น $P(-3) = 2(-3)^3 - 5(-3)^2 - (-3) - 6$

$= 2(-27) - 5(9) + 9 - 6$

$= -54 - 45 + 9 - 6 = -96$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.10** กำหนดให้ $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 7x - 6$ จงแสดงว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $x - 1$ จะเป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ เมื่อ $P(1) = 0$

แต่จาก $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 7x - 6$ จะได้ว่า

$P(1) = 6(1)^3 + 7(1)^2 - 7(1) - 6 = 6 + 7 - 7 - 6 = 0$

เนื่องจาก $P(1) = 0$ แสดงว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ ❑

**แบบฝึกหัด 3.3 ก**

1. จงใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะในการหาคำตอบของสมการในตัวอย่างที่ 3.6, 3.7 และ 3.8
2. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x - a$ หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ เหลือเศษเท่ากับ 4 แล้ว ผลบวกของค่า a ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวเท่ากับเท่าใด
3. ถ้าพหุนาม $px^3 - 15x^2 + 27x + q$ หารด้วย $x - 2$ และ $x - 5$ แล้วเหลือเศษเท่ากับ 22 แล้วจงหาค่า $p + q$
4. เซตคำตอบของสมการ $\frac{x^2+1}{x} - \frac{x-1}{x} = 1$ มีขอบเขตบนหรือไม่

### *3.3.2 อสมการของพหุนามดีกรี n*

อสมการของพหุนามดีกรี n ที่เรากำลังจะพิจารณาต่อไปนี้จะอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

**บทนิยาม 3.5**

กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และ $Q(x) \neq 0$ แล้วอสมการของพหุนามดีกรี n จะอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังนี้

1) $P(x) \cdot Q(x) < 0$ หรือ $P(x) \cdot Q(x) > 0$

2) $P(x) \cdot Q(x) \leq 0$ หรือ $P(x) \cdot Q(x) \geq 0$

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ หรือ $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$

4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ หรือ $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

1) *อสมการที่อยู่ในรูป $P(x)\cdot Q(x) < 0$, $P(x)\cdot Q(x) > 0$, $P(x)\cdot Q(x) \le 0$ หรือ $P(x)\cdot Q(x) \ge 0$*

การแก้อสมการที่อยู่ในลักษณะดังกล่าวทำได้โดยการปรับอสมการให้อยู่ในรูปของสมการ โดยให้ $P(x)\cdot Q(x) = 0$ จากนั้นทำให้สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x เป็นบวกก่อน แล้วแก้สมการเพื่อหาค่าวิกฤต x ใส่ลงบนเส้นจำนวนจริงโดยเรียงจากน้อยไปมากจากซ้ายไปขวา

ขั้นตอนต่อไปคือ ใส่เครื่องหมายแยกช่วงจากขวามายังซ้ายโดยเริ่มต้นเขียนด้วยเครื่องหมายบวก สลับกับเครื่องหมายลบเรื่อยไปเช่นนี้จนกระทั่งครบ ในการตอบให้พิจารณาเครื่องหมายอสมการของโจทย์ โดยถ้าโจทย์เป็นเครื่องหมาย "$<$" หรือ "$\le$" ให้พิจารณาช่วงบนเส้นจำนวนจริงที่เป็นเครื่องหมายลบ และสำหรับเครื่องหมาย "$>$" หรือ "$\ge$" ก็เป็นไปในทางกลับกัน ส่วนการเขียนเซตคำตอบให้ยึดเครื่องหมายของอสมการเป็นหลักด้วย

**ตัวอย่างที่ 3.11** จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$

**วิธีทำ** จากตัวอย่างที่ 3.8 เราทราบว่า $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x-1)(x+1)$

ดังนั้น เขียนอสมการใหม่เป็น $(x+2)(x-1)(x+1) > 0$

ได้ค่าวิกฤตคือ $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$

นำค่าวิกฤตที่ได้ดังกล่าวไปใส่บนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -2 & & -1 & & 1 & \end{array}$$

เนื่องจากโจทย์เป็นเครื่องหมาย "$>$" จึงเลือกช่วงที่เป็นบวกมาตอบ

จะได้ว่า เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid -2 < x < -1 \text{ หรือ } x > 1\}$

หรือเขียนในรูปของช่วงได้ว่า $A = (-2, -1) \cup (1, \infty)$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.12** กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $6x^3 + 7x^2 - 7x - 6 \le 0$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $\{x \in A \mid x \in I^+ \text{ และ } x \le 5\}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $6x^3 + 7x^2 - 7x - 6 = (x-1)(2x+3)(3x+2)$

จะได้ว่า $(x-1)(2x+3)(3x+2) \le 0$ ดังนั้น ค่าวิกฤตได้แก่ $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$

เขียนเส้นจำนวนจริงจากค่าวิกฤตได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -\frac{3}{2} & & -\frac{2}{3} & & 1 & \end{array}$$

เนื่องจากเครื่องหมายของอสมการโจทย์เป็น "$\le$" จึงได้ว่า

เซตคำตอบของอสมการ คือ A = $\{x \mid -\infty \le x \le -\frac{3}{2}$ หรือ $x \ge 1\}$ เขียนเป็นช่วงได้คือ $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)$ แต่โจทย์ต้องการหาจำนวนสมาชิกของเซต $\{x \in A \mid x \in I^+$ และ $x \le 5\}$ จะได้ว่า $n(\{x \in A \mid x \in I^+$ และ $x \le 5\}) = 5$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.13** เซตคำตอบของอสมการ $2^{x^2(x-3)} < 8^{\left(\frac{2}{3}-x\right)}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

ก. $(1, \infty)$ ข. $(-2, 100)$

ค. $(-10, 10)$ ง. $(-\infty, 2)$

**วิธีทำ** อสมการที่โจทย์กำหนดให้เป็นอสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล

จาก $2^{x^2(x-3)} < 8^{\left(\frac{2}{3}-x\right)}$

$$2^{x^2(x-3)} < 2^{3\left(\frac{2}{3}-x\right)}$$

$$2^{x^2(x-3)} < 2^{2-3x}$$

เนื่องจากเป็นฟังก์ชันเพิ่ม $(2 > 0)$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $x^2(x-3) < 2-3x$

$x^2(x-3) < 2-3x$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 < 0$ -----(1)

จากอสมการ (1) พิจารณาทางซ้ายของอสมการ

ให้ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \Rightarrow$ เนื่องจาก $P(2) = 0$ แสดงว่า $x-2$ หาร $P(x)$ ลงตัว

โดยการหารสังเคราะห์ (ศึกษาจากภาคผนวก) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 2 &= (x-2)(x^2 - x + 1) \\ &= (x-2)[(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + 1 - \tfrac{1}{4}] \\ &= (x-2)[(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$

จากอสมการ (1) จะได้ $(x-2)[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] < 0$

แต่จะเห็นว่านิพจน์ $[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] > 0$ เสมอ

ดังนั้น $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$ หรือเขียนในรูปของช่วงได้ $(-\infty, 2)$ ❑

*2) อสมการที่อยู่ในรูป* $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ *หรือ* $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$ *หรือ* $\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$

การแก้อสมการที่อยู่ในลักษณะดังกล่าวจะมีวิธีการที่ต่างออกไปจากข้อ 1) เล็กน้อย กล่าวคือ เราจะต้องทำให้ตัวส่วนหมดไป จากนั้นในขั้นตอนของการแก้อสมการตลอดจนการพิจารณาช่วงคำตอบก็ดำเนินการเหมือนกับข้อ 1) แต่อย่างไรก็ตาม มีข้อควรระวังก็คือ จะต้องพิจารณาค่าวิกฤตสำหรับตัวส่วนด้วย และต้องคำนึงถึงความจริงที่ว่า ไม่มีการนิยามการหารด้วยศูนย์ในทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

**ตัวอย่างที่ 3.14** จำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของอสมการ $-5 \le \frac{x^2 - 6}{x} \le 1$

ก. 8 ข. 9

ค. 10 ง. 11

**วิธีทำ** จากโจทย์ $-5 \le \frac{x^2 - 6}{x} \le 1$ เราสามารถแบ่งออกเป็นอสมการย่อยๆ ได้ 2 ชุดดังนี้

1) $-5 \le \frac{x^2 - 6}{x}$

2) $\frac{x^2 - 6}{x} \le 1$

=> จาก $-5 \le \frac{x^2 - 6}{x}$ จะได้ว่า $\frac{x^2 - 6}{x} + 5 \ge 0$

$\frac{x^2 + 5x - 6}{x} \ge 0$

$x(x + 6)(x - 1) \ge 0$

ได้ค่าวิกฤตคือ $x = -6,\ x = 0,\ x = 1$

ดังนั้น คำตอบของอสมการชุดนี้ คือ $[-6, 0) \cup [1, \infty)$

=> จาก $\frac{x^2 - 6}{x} \le 1$ จะได้ว่า $\frac{x^2 - 6}{x} - 1 \le 0$

$\frac{x^2 - x - 6}{x} \le 0$

$x(x - 3)(x + 2) \le 0$

ได้ค่าวิกฤตคือ $x = -2,\ x = 0,\ x = 3$

ดังนั้น คำตอบของอสมการชุดนี้ คือ $(-\infty, -2] \cup (0, 3]$

=> นำเซตคำตอบของอสมการทั้ง 2 ชุดมาหาส่วนร่วมกัน (intersection) ดังนี้

$\{[-6, 0) \cup [1, \infty)\} \cap \{(-\infty, -2] \cup (0, 3]\} = [-6, -2] \cup [1, 3]$

$= \{-6, -5, -4, -3, -2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{-6, -5, -4, -3, -2, 1, 2, 3\}$

จะได้ว่า $n([-6, -2] \cup [1, 3]) = 8$ ❑

## แบบฝึกหัด 3.3 ข

**<u>จงแสดงวิธีการหาคำตอบของปัญหาแต่ละข้อต่อไปนี้โดยละเอียด</u>**

1. เซตคำตอบของอสมการ $(4^x - 2)\log(1 - x^2) > 0$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   ก. $(-2, \frac{1}{2})$      ข. $(-\frac{1}{2}, 2)$

   ค. $(0, 10)$      ง. $(\frac{1}{2}, 20)$

2. กำหนดให้ I คือเซตของจำนวนเต็ม และ $S = \{x \mid ||x - 1| - 1| \cdot ||x - 1| + 1| < 50\}$

   จำนวนสมาชิกของเซต $S \cap I$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   ก. 13      ข. 14

   ค. 15      ง. 16

3. ให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log(\log x) + \log(9 - \log x^2) \geq 1$

   ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ S ที่มีค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุด ตามลำดับ แล้ว ab มีค่าเท่ากับข้อใด

   ก. $10^{\frac{7}{2}}$      ข. $10^{\frac{9}{2}}$

   ค. $10^{\frac{11}{2}}$      ง. $10^{\frac{13}{2}}$

## 3.4 สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

เราได้เคยศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงมาแล้วในหัวข้อ 1.5 สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาการแก้สมการและอสมการที่อยู่ในรูปของค่าสัมบูรณ์

### *3.4.1 สมการค่าสัมบูรณ์*

**บทนิยาม 3.6**

กำหนดให้ P(x) และ Q(x) เป็นพหุนามดีกรี n และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วสมการค่าสัมบูรณ์จะมีรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

1) $|P(x)| + |Q(x)| = c$ หรือ $|P(x)| - |Q(x)| = c$

2) $|P(x) \cdot Q(x)| = c$

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ในข้อ 1) ให้หาค่าวิกฤตของ P(x) และ Q(x) โดยให้ $P(x) = 0$ และ $Q(x) = 0$ จากนั้นให้นำค่าวิกฤตมาใส่ในเส้นจำนวนจริง แล้วพิจารณาแยกช่วงคล้ายๆ กับการแก้อสมการพหุนาม

**ตัวอย่างที่ 3.15** ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x-4|+|x-3| = 1$ แล้ว A จะเท่ากับเซตในข้อใด

ก. $(3, 4)$ ข. $\{x \in R \mid |x-\frac{7}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$

ค. $(-\infty, 4]$ ง. $[3, \infty)$

**วิธีทำ** ให้ $x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$

และให้ $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$

โดยบทนิยามของค่าสัมบูรณ์และจากค่าวิกฤตที่คำนวณไว้ข้างต้น เราสามารถสร้างเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้

| $x < 3$ | | $3 \leq x \leq 4$ | | $x > 4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert x-3\rvert = -(x-3)$ | **3** | $\lvert x-3\rvert = x-3$ | **4** | $\lvert x-3\rvert = x-3$ |
| $\lvert x-4\rvert = -(x-4)$ | | $\lvert x-4\rvert = -(x-4)$ | | $\lvert x-4\rvert = x-4$ |

จากเส้นจำนวนจริงข้างต้น

=> พิจารณาช่วง $x < 3$ จะได้ว่า

$-(x-4)-(x-3) = 1$

$-2x = -6$

$x = 3$

จะได้เซตคำตอบของช่วงนี้คือ {}

=> พิจารณาช่วง $3 \leq x \leq 4$ จะได้ว่า

$-(x-4)+(x-3) = 1$

$1 = 1$

แสดงว่าอสมการเป็นจริงในช่วงที่กำหนดให้ ดังนั้นเซตคำตอบของช่วงนี้คือ $[3, 4]$

=> พิจารณาช่วง $x > 4$ จะได้ว่า

$(x-4)+(x-3) = 1$

$2x-7 = 1$

$2x = 8$

$x = 4$

จะได้เซตคำตอบของช่วงนี้คือ {}

จากที่พิจารณาทั้งหมด สรุปได้ว่าเซตคำตอบของสมการ $|x-4|+|x-3| = 1$ คือ $[3, 4]$

ต่อไปพิจารณาตัวเลือก ข.

จาก $\left|x-\frac{7}{2}\right| \le \frac{1}{2}$

โดยบทนิยาม 1.6 (2) จะได้ว่า $-\frac{1}{2} \le x-\frac{7}{2} \le \frac{1}{2}$

แก้อสมการได้ $3 \le x \le 4$ ซึ่งเขียนในรูปช่วงได้ คือ $[3, 4]$ เพราะฉะนั้น ตอบข้อ ข. ❑

สำหรับการแก้สมการค่าสัมบูรณ์ในข้อ 2) นั้น เราใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์ที่ว่า สำหรับจำนวนจริง x, y ใดๆ จะได้ว่า $|xy| = |x||y|$ จากนั้นพิจารณาแยกช่วงตามปกติเหมือนกับข้อ 1) พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 3.16** จงหาเซตคำตอบของสมการ $|(x-4)(x-3)| = 1$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $|(x-4)(x-3)| = |x-4|\cdot|x-3| = 1$

ให้ $x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$

และให้ $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$

| $x < 3$ | | $3 \le x \le 4$ | | $x > 4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert x-3\rvert = -(x-3)$ | 3 | $\lvert x-3\rvert = x-3$ | 1 | $\lvert x-3\rvert = x-3$ |
| $\lvert x-4\rvert = -(x-4)$ | | $\lvert x-4\rvert = -(x-4)$ | | $\lvert x-4\rvert = x-4$ |

จากเส้นจำนวนจริงข้างต้น

=> พิจารณาช่วง $x < 3$ จะได้ว่า

$(-(x-4))(-(x-3)) = 1$

$(x-4)(x-3) = 1$

$x^2-7x+11 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2-4(1)(11)}}{2}$

$x_1 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$

จะได้เซตคำตอบของช่วงนี้คือ $\{\frac{7-\sqrt{5}}{2}\}$ ($\frac{7+\sqrt{5}}{2}$ ใช้ไม่ได้ เพราะอะไร?)

=> พิจารณาช่วง $3 \le x \le 4$ จะได้ว่า

$-(x-3)(x-4) = 1$

$-(x^2-7x+12) = 1$

$x^2-7x+13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2-4(1)(13)}}{2}$

$x_1 = \frac{7+\sqrt{-3}}{2}$, $x_2 = \frac{7-\sqrt{-3}}{2}$

รากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งจะไม่พิจารณาในที่นี้ แสดงว่าเซตคำตอบคือ {}

=> พิจารณาช่วง $x > 4$ จะได้ว่า $(x-4)(x-3) = 1$

จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเดียวกับกรณีแรก แต่เซตคำตอบต่างกัน คือ $\{\frac{7+\sqrt{5}}{2}\}$

จากที่พิจารณาทั้งหมด สรุปได้ว่าเซตคำตอบของสมการ $|(x-4)(x-3)| = 1$

คือ $\{\frac{7+\sqrt{5}}{2}, \frac{7-\sqrt{5}}{2}\}$ ❑

### *3.4.2 อสมการค่าสัมบูรณ์*

**บทนิยาม 3.7**

กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n แล้วอสมการค่าสัมบูรณ์จะมีรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

1) $|P(x) \cdot Q(x)| > 0$ หรือ $|P(x) \cdot Q(x)| < 0$
2) $|P(x) \cdot Q(x)| \geq 0$ หรือ $|P(x) \cdot Q(x)| \leq 0$
3) $|P(x) + Q(x)| \leq 0$ หรือ $|P(x) + Q(x)| \geq 0$
4) $|P(x) + Q(x)| < 0$ หรือ $|P(x) + Q(x)| > 0$

การแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ในซึ่งมีรูปแบบตามบทนิยาม 3.7 นั้นจะใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์ทั้งสิ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 3.17** จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 - 16| < 9$

**วิธีทำ** จากบทนิยาม 1.6 (1) จะได้ว่า

$-9 < x^2 - 16 < 9$ พิจารณาอสมการย่อยๆ ดังนี้

=> $-9 < x^2 - 16$

$x^2 - 7 > 0$

$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) > 0$

ได้เซตคำตอบคือ $(-\infty, \sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

=> $x^2 - 4 < 9$

$x^2 - 13 < 0$

$(x - \sqrt{13})(x + \sqrt{13}) < 0$

ได้เซตคำตอบคือ $(-\sqrt{13}, \sqrt{13})$

จากที่พิจารณาทั้งหมดจะได้เซตคำตอบของอสมการ คือ

$((-\infty, \sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)) \cap (-\sqrt{13}, \sqrt{13}) = (-\sqrt{13}, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \sqrt{13})$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.18** จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2-x| \le 2+x$

**วิธีทำ** โดยสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $-(2+x) \le 2-x \le 2+x$ ซึ่งแยกออกเป็นอสมการย่อยๆ ได้ดังนี้

$\Rightarrow$ $-(2+x) \le 2-x$

$-x-2 \le 2-x$

$-2 \le 2$

แสดงว่าเป็นจริงทุกค่า x

$\Rightarrow$ $2-x \le 2+x$

$-2x \le 2-2 = 0$

$x \ge 0$

เพราะฉะนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$ ❑

**ตัวอย่างที่ 3.19** จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{|x|-1}{|x|-2} \le 0$

**วิธีทำ** กรณีที่ $x \ge 0$ จะได้ว่า $\frac{x-1}{x-2} \le 0$ เซตคำตอบ คือ $[1, 2)$

กรณีที่ $x < 0$ จะได้ว่า $\frac{-x-1}{-x-2} \le 0$

$\frac{-(x+1)}{-(x+2)} \le 0$

$\frac{x+1}{x+2} \le 0$ ได้เซตคำตอบ คือ $(-2, -1]$

เพราะฉะนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-2, -1] \cup [1, 2)$ ❑

# บทที่ 4
# การประมาณค่าของจำนวนจริง

การประมาณค่าของจำนวนจริง เป็นการหาค่าเชิงตัวเลขของจำนวนจริงใดๆ เพื่อนำไปใช้ในงานประเภทต่างๆ เช่น ทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น วัตถุประสงค์ของการศึกษาในบทนี้ก็เพื่อให้ผู้อ่านมีความสามารถในการหาค่าประมาณของจำนวนจริงด้วยวิธีการต่างๆ ตลอดจนเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมได้ด้วย

การประมาณค่าของจำนวนจริงที่จะนำเสนอในบทนี้ ผู้เขียนได้เลือกมาพิจารณา 4 วิธี ซึ่งคาดว่าเหมาะสมและเพียงพอกับระดับความรู้ของผู้อ่าน ได้แก่ การหารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงด้วยวิธีเฉลี่ย การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยวิธีเรขาคณิต วิธีแคลคูลัส และวิธีอนุกรมกำลัง ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดตามลำดับต่อไป

## 4.1 การหารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงบวกด้วยวิธีเฉลี่ย

การหารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงบวกด้วยวิธีเฉลี่ย มีหลักการที่สำคัญก็คือ การกำหนดช่วงเริ่มต้นของจำนวนจริงบวกซึ่งเราทราบแน่ชัดว่า รากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงบวกดังกล่าวอยู่ระหว่างจำนวนจริงบวกสองตัวนั้น แล้วหาค่าเฉลี่ยของจุดปลายช่วงดังกล่าว ต่อไปสร้างช่วงใหม่ที่มีจุดปลายจุดหนึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของจุดปลายช่วงที่ผ่านมา แล้วตรวจสอบว่ารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงบวกที่เราต้องการทราบค่าอยู่ระหว่างจุดปลายช่วงใหม่นี้หรือไม่ ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งไม่สามารถสร้างช่วงได้อีกก็เป็นอันสิ้นสุดกระบวนการ เพื่อความเข้าใจดียิ่งขึ้นโปรดพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 4.1** จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{6}$ ให้ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่งในการคำนวณ

**วิธีทำ** เนื่องจากเราทราบว่า $2.0000^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 3.0000^2$ จะเห็นได้ชัดว่า $\sqrt{6}$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง 2 กับ 3 แน่นอน จึงหาค่าเฉลี่ยของ 2.0000 กับ 3.0000 ได้ $\frac{2.0000 + 3.0000}{2} = 2.5000$

พิจารณา $2.5000^2 = 6.2500$ จะเห็นว่า $2.0000^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5000^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.0000 กับ 2.5000 ได้ $\frac{2.0000 + 2.5000}{2} = 2.2500$

พิจารณา $2.2500^2 = 5.0625$ จะเห็นว่า $2.2500^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5000^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.2500 กับ 2.5000 ได้ $\frac{2.2500 + 2.5000}{2} = 2.3750$

พิจารณา $2.3750^2 = 5.6400$ จะเห็นว่า $2.3750^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5000^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.375 กับ 2.5000 ได้ $\frac{2.3750 + 2.5000}{2} = 2.4375$

พิจารณา $2.4375^2 = 5.9400$ จะเห็นว่า $2.4375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5000^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4375 กับ 2.5000 ได้ $\frac{2.4375 + 2.5000}{2} = 2.4688$

พิจารณา $2.4688^2 = 6.0949$ จะเห็นว่า $2.4375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4688^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4375 กับ 2.4688 ได้ $\frac{2.4375 + 2.4688}{2} = 2.4532$

พิจารณา $2.4532^2 = 6.0182$ จะเห็นว่า $2.4375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4532^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4375 กับ 2.4532 ได้ $\frac{2.4375 + 2.4532}{2} = 2.4454$

พิจารณา $2.4454^2 = 5.9799$ จะเห็นว่า $2.4454^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4532^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4454 กับ 2.4532 ได้ $\frac{2.4454 + 2.4532}{2} = 2.4493$

พิจารณา $2.4493^2 = 5.9991$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4532^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4532 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4532}{2} = 2.4513$

พิจารณา $2.4513^2 = 6.0089$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4513^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4513 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4513}{2} = 2.4503$

พิจารณา $2.4503^2 = 6.0040$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4503^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4503 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4503}{2} = 2.4498$

พิจารณา $2.4498^2 = 6.0015$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4498^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4498 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4498}{2} = 2.4496$

พิจารณา $2.4496^2 = 6.0005$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4496^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4496 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4496}{2} = 2.4495$

พิจารณา $2.4495^2 = 6.0000$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 \not< 2.4495^2$ จึงยุติการหาค่าเฉลี่ย

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $\sqrt{6} \approx 2.4495$ ❑

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่ากระบวนการเฉลี่ยนั้นเป็นกระบวนการที่ยืดยาว หากว่าเราเลือกค่าเริ่มต้น (initial value) ที่ไม่เหมาะสม ในตัวอย่างต่อไปนี้จะเลือกค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมมากยิ่งขึ้น

**ตัวอย่างที่ 4.2** จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{6}$ ในช่วง [2, 2.5]

**วิธีทำ** เราทราบว่า $2^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2 กับ 2.5 ได้ $\frac{2 + 2.5}{2} = 2.25$

พิจารณา $2.25^2 = 5.0625$ จะเห็นว่า $2.25^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5^2$

หาค่าเฉลี่ยของ 2.25 กับ 2.5 ได้ $\frac{2.25 + 2.5}{2} = 2.375$

พิจารณา $2.375^2 = 5.6406$ จะเห็นว่า $2.375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5^2$

หาค่าเฉลี่ยของ 2.375 กับ 2.5 ได้ $\frac{2.375 + 2.5}{2} = 2.4375$

พิจารณา $2.4375^2 = 5.9414$ จะเห็นว่า $2.4375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.5^2$

หาค่าเฉลี่ยของ 2.4375 กับ 2.5 ได้ $\frac{2.4375 + 2.5}{2} = 2.4688$

พิจารณา $2.4688^2 = 6.0949$ จะเห็นว่า $2.4375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4688^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4375 กับ 2.4688 ได้ $\frac{2.4375 + 2.4688}{2} = 2.4532$

พิจารณา $2.4532^2 = 6.0182$ จะเห็นว่า $2.4375^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4532^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4375 กับ 2.4532 ได้ $\frac{2.4375 + 2.4532}{2} = 2.4454$

พิจารณา $2.4454^2 = 5.9799$ จะเห็นว่า $2.4454^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4532^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4454 กับ 2.4532 ได้ $\frac{2.4454 + 2.4532}{2} = 2.4493$

พิจารณา $2.4493^2 = 5.9991$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4532^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4532 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4532}{2} = 2.4513$

พิจารณา $2.4513^2 = 6.0089$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4513^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4513 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4513}{2} = 2.4503$

พิจารณา $2.4503^2 = 6.0040$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4503^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4503 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4503}{2} = 2.4498$

พิจารณา $2.4498^2 = 6.0015$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4498^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4498 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4498}{2} = 2.4496$

พิจารณา $2.4496^2 = 6.0005$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 < 2.4496^2$ หาค่าเฉลี่ยของ 2.4493 กับ 2.4496 ได้ $\frac{2.4493 + 2.4496}{2} = 2.4495$

พิจารณา $2.4495^2 = 6.0000$ จะเห็นว่า $2.4493^2 < \left(\sqrt{6}\right)^2 \not< 2.4495^2$ จึงยุติการหาค่าเฉลี่ย

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $\sqrt{6} \approx 2.4495$ ❑

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า ถึงแม้ว่าเราจะเลือกค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมแล้วแต่ก็ยังเป็นกระบวนการที่ยืดยาวอยู่ดี ดังนั้น จึงถือว่าวิธีการเฉลี่ยเป็นวิธีการที่ไม่ค่อยนิยมใช้กันมากนัก เพราะไม่สะดวกต่อการคำนวณด้วยมือ อย่างไรก็ตาม ถือว่าเป็นวิธีการที่สะดวกมากถ้าไม่ต้องการความละเอียดมากนัก เพียงแต่เฉลี่ยให้ได้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงเท่านั้นก็นำไปใช้งานได้แล้ว

## แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{17}$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สาม (ค่าจริงคือ 4.1231)
2. จงเขียนขั้นตอนวิธี (algorithm) หรือรหัสโปรแกรม (source code) เพื่อหาค่ารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนจริงบวกใดๆ ที่กำหนดให้ และตรวจสอบความถูกต้องโดยหาค่าประมาณของ $\sqrt{17}$

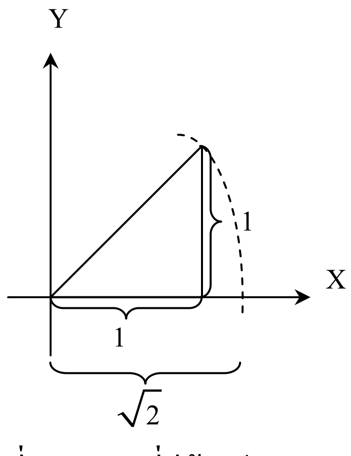
ಌ ಌ ಌ ಌ ಌ ಌ

## 4.2 การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยวิธีทางเรขาคณิต

การหาค่าประมาณของจำนวนจริงด้วยวิธีทางเรขาคณิต มีหลักการสำคัญคือ การสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนเส้นจำนวนจริงโดยให้มีผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับกำลังสองของจำนวนจริงที่ต้องการประมาณค่า จากนั้นสร้างส่วนโค้งให้มีรัศมียาวเท่ากับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากจุดปลายของด้านตรงข้ามมุมฉากให้ลงมาตัดบนเส้นจำนวนจริง เมื่อต้องการทราบค่าประมาณก็เพียงแต่ใช้ไม้บรรทัดวัดระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่เส้นโค้งนี้ตัดเส้นจำนวนจริงนั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 4.3** จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ ด้วยวิธีทางเรขาคณิต

**วิธีทำ** เนื่องจาก $1^2 + 1^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ แสดงว่าเราต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย ดังนี้




**รูป 4.1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย**

จากรูป 4.1 จะได้ว่าจุดตัดของส่วนโค้งที่อยู่บนเส้นจำนวนจริงจะมีพิกัด (1.41, 0) โดยประมาณ นั่นคือจะได้ว่า $\sqrt{2}$ มีค่าประมาณ 1.41 ❑

## แบบฝึกหัด 4.2

จงแสดงการหาค่าประมาณของจำนวนจริงต่อไปนี้ด้วยวิธีทางเรขาคณิต

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{18}$
3. $\sqrt{72}$
4. $\sqrt{98}$

## 4.3 การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยวิธีแคลคูลัส

จากบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน (ศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากหนังสือเรียนออนไลน์ เล่มที่ 11 แคลคูลัสเบื้องต้น) เราทราบว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง f ที่ $x = x_0$ เป็นไปตามสมการ

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{-----(4.3.1)}$$

ถ้า h มีค่าน้อยมาก จะได้ว่า $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ -----(4.3.2)

คูณตลอดพจน์ (4.3.2) ด้วย h จะได้ $h \cdot f'(x_0) \approx f(x_0 + h) - f(x_0)$ จัดรูปใหม่ ในที่สุดจะได้ว่า

$$\mathbf{f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)} \quad \text{-----(4.3.3)}$$

พจน์ (4.3.3) คือ การประมาณค่าของ $f(x_0 + h)$ ด้วย $f(x_0)$ และ $f'(x_0)$ การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยการใช้พจน์ (4.3.3) นี้เราจะเริ่มต้นจากการนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องขึ้นมาฟังก์ชันหนึ่งให้มีรูปแบบคล้ายคลึงกับจำนวนจริงที่เราต้องการประมาณค่า จากนั้นหาค่าของ h และ $f'(x_0)$ แล้วนำไปแทนค่าในพจน์ (4.3.3) ก็จะได้คำตอบที่ต้องการ ขอให้ผู้อ่านพิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้จะทำให้เข้าใจวิธีการดียิ่งขึ้น

**ข้อสังเกต** นอกจาก f ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ก็ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

**ตัวอย่างที่ 4.4** จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{6}$ ด้วยวิธีทางแคลคูลัส และกำหนดให้ $x_0 = 4$

**วิธีทำ** กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้ว่า $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h = 6 - 4 = 2$ และ $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0.25$

จาก $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ จะได้ว่า

$f(6) = f(4 + 2) \approx f(4) + (2)(0.25) \approx 2.50$ ❑

**ข้อสังเกต** เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจริง คือ $\sqrt{6} \approx 2.449$ จะเห็นได้ว่ามีความใกล้เคียงกันมาก

**หมายเหตุ** จากตัวอย่างที่ 4.4 ขอให้ผู้อ่านเปลี่ยนค่าเริ่มต้นเป็น $x_0 = 2.5$ ดำเนินการคำนวณด้วยวิธีแคลคูลัส แล้วเปรียบเทียบค่าประมาณที่ได้ใหม่กับค่าประมาณที่ได้จากค่าเริ่มต้น $x_0 = 4$ และค่าจริงว่าแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร

**ตัวอย่างที่ 4.5** จงหาค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ของ sin 0.6000 ด้วยวิธีทางแคลคูลัส เมื่อกำหนดให้ $x_0 = 0.5000$ และ $f(x_0) = 0.4794$ (ตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

**วิธีทำ** กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ (x มีหน่วยเป็นเรเดียน) จะได้ว่า $f'(x) = \cos x$

$h = 0.6000 - 0.5000 = 0.1000$ และ $f'(0) = \cos 0.5000 = 0.8776$

จาก $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ จะได้ว่า

$f(0.6000) = f(0.5000 + 0.1000) \approx 0.4794 + (0.1000)(0.8776) \approx 0.567$ ❑

## แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาค่าประมาณของจำนวนจริงต่อไปนี้ ด้วยวิธีทางแคลคูลัส

    1) $\dfrac{e^{2.5} + e^{-2.5}}{2}$

    2) $\sqrt{10001}$

    3) $\sin 0.75 - \cos 0.75$ (กำหนดให้ $\sin 0.70 = 0.6442$ และ $\cos 0.70 = 0.7648$)

    **หมายเหตุ** อนุพันธ์ของฟังก์ชันบางตัวเปิดจากตารางในภาคผนวก

2. จงพิจารณาว่า สำหรับโจทย์แต่ละข้อในข้อ 1 ค่าที่ได้จากการประมาณมีความแตกต่างจากค่าจริงมากน้อยเพียงใด

## 4.4 การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยอนุกรมกำลัง

การประมาณค่าของจำนวนจริงด้วยอนุกรมกำลัง เป็นการใช้สมบัติของอนุกรมกำลังที่จะลู่เข้าสู่จำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่ง และจากภาคผนวกเราทราบว่าเราใช้อนุกรมกำลังในการประมาณค่าของฟังก์ชันอดิศัย เพราะฉะนั้นในหัวข้อนี้เราจะมาศึกษาวิธีการประมาณค่าของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันอดิศัย

**ตัวอย่างที่ 4.6** กำหนดให้ $f(x) = e^x$ จงหาค่าของ $f(1.2500)$ โดยใช้การประมาณด้วยอนุกรมแมคคลอริน ใน 6 พจน์แรก (ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

**วิธีทำ** จากอนุกรมแมคคลอรินของ $e^x$ คือ $f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$

$$f(1.2500) \approx 1 + (1.2500) + \frac{1}{2!}(1.2500)^2 + \frac{1}{3!}(1.2500)^3 + \frac{1}{4!}(1.2500)^4 + \frac{1}{5!}(1.2500)^5$$

$$\approx 1 + 1.2500 + 0.7813 + 0.3255 + 0.1017 + 0.0254 \approx 3.4839$$ ❑

**ตัวอย่างที่ 4.7** กำหนดให้ $f(x) = \ln x$ จงหาค่าของ $f(2.1)$ โดยใช้การประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x_0 = 1$ ใน 6 พจน์แรก (ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

**วิธีทำ** จาก $f(x) = \ln x,\ f(1) = \ln 1 = 0$ จะได้ว่า

$f'(x) = \frac{1}{x},\ f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3},\ f'''(1) = 2$

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},\ f^{(4)}(1) = -6$

$f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5},\ f^{(5)}(1) = 24$

จากอนุกรมเทย์เลอร์ $T(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k$

$$\approx \ln 1 + \frac{1}{1!}(2.1 - 1) + \frac{(-1)}{2!}(2.1 - 1)^2 + \frac{2}{3!}(2.1 - 1)^3 + \frac{(-6)}{4!}(2.1 - 1)^4 + \frac{24}{5!}(2.1 - 1)^5$$

$$\approx 0 + 1.1000 - 0.6050 + 0.4437 - 0.3660 + 0.3221 \approx 0.8948$$ ❑

## แบบฝึกหัด 4.4

1. จงใช้การประมาณด้วยอนุกรมกำลังหาค่าประมาณของจำนวนจริงในแบบฝึกหัดที่ 4.3
2. จงเปรียบเทียบความแตกต่างที่ได้จากการประมาณทั้งสองแบบของแบบฝึกหัดในข้อ 1
3. กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ จงประมาณค่า $f(0.75)$ โดยใช้อนุกรมกำลังเปรียบเทียบกับการใช้แคลคูลัส ถ้ากำหนดให้ค่าจริงของ $f(0.75) = 0.6816$ จงพิจารณาว่าการประมาณแบบใดที่ให้ความแม่นยำมากที่สุด

# ภาคผนวก

## 1. การหารสังเคราะห์

***การหารสังเคราะห์*** เป็นกระบวนการหารพหุนามด้วยการลดรูปพหุนามลงให้เหลือเพียงสัมประสิทธิ์ของพหุนามนั้น ซึ่งมีกระบวนการดังต่อไปนี้

กำหนดให้ P(x) เป็นพหุนามดีกรี n โดยที่ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a_n \neq 0$ เป็นพหุนามที่เป็นตัวตั้ง และให้ $Q(x) = x - c$ เมื่อ $c \neq 0$ เป็นพหุนามที่เป็นตัวหาร แล้วการหารสังเคราะห์เป็นไปตามแผนภาพต่อไปนี้

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\
x = c & \downarrow & ca_n & ca_{n-1} + c^2a_n & \cdots \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + ca_n & a_{n-2} + ca_{n-1} + c^2a_n & \cdots
\end{array}
$$

**รูป ผ.1 แผนภาพแสดงการหารสังเคราะห์**

จากแผนภาพข้างต้น สัมประสิทธิ์ที่เป็นตัวตั้งให้เขียนเรียงกันจากสัมประสิทธิ์หน้าพหุนามที่มีดีกรีสูงสุดไปยังต่ำสุด หากไม่ปรากฏพหุนามตัวไหนให้ถือว่าสัมประสิทธิ์หน้าพหุนามนั้นเท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่อยู่ใต้เส้นขวาง คือ สัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นผลหาร ส่วนเศษที่ได้จากการหารจะอยู่ทางขวามือสุด

อนึ่ง มีข้อสังเกตว่าการหารสังเคราะห์นั้นใช้ได้กับตัวหารที่เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งเท่านั้น หากจะใช้กับตัวหารที่เป็นพหุนามดีกรีมากกว่า 1 จะต้องแยกตัวประกอบของพหุนามตัวหารให้เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งเสียก่อน แล้วใช้การหารสังเคราะห์กับตัวหารที่เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งนั้น ส่วนพหุนามที่ไม่เป็นดีกรีหนึ่งก็ใช้การหารพหุนามด้วยวิธีพีชคณิตตามเดิม

เพื่อช่วยให้เข้าใจกระบวนการหารสังเคราะห์ได้ดียิ่งขึ้น ขอให้ผู้อ่านพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง ผ.1.1** จงหาค่าของ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อกำหนดให้ $P(x) = x^2 - 2x + 1$ ด้วย $Q(x) = x + 2$

**วิธีทำ** จากแผนภาพการสังเคราะห์ และจากโจทย์ที่กำหนดให้นำมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้

$$
\begin{array}{r|ccc}
 & 1 & -2 & 1 \\
x = -2 & \downarrow & & \\
\hline
 & 1 & &
\end{array}
$$

แผนภาพข้างต้น กระบวนการหารสังเคราะห์จะเริ่มต้นจากนำ –2 มาคูณกับ 1 ที่อยู่ใต้เส้นขวาง

ได้ผลลัพธ์เท่ากับ –2 แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใส่ไว้ใต้ –2 ดังนี้

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -2 & 1 \\
x = -2 & \downarrow & -2 & \\
\hline
 & 1 & & \\
\end{array}
$$

จากนั้นนำ – 2 มาบวกกับ – 2 ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนก่อนหน้านี้ได้เท่ากับ – 4

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -2 & 1 \\
x = -2 & \downarrow & -2 & \\
\hline
 & 1 & -4 & \\
\end{array}
$$

ขั้นตอนต่อไป นำ – 2 มาคูณกับผลลัพธ์ที่ได้ก่อนหน้านี้คือ – 4 ได้เท่ากับ 8 นำ 8 ไปใส่ไว้ใต้เลข 1

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -2 & 1 \\
x = -2 & \downarrow & -2 & 8 \\
\hline
 & 1 & -4 & 9 \\
\end{array}
$$

ขั้นตอนสุดท้าย นำ 1 มาบวกกับ 8 ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนก่อนหน้านี้ได้เท่ากับ 9

จะได้ว่า $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} = x - 4 + \frac{9}{x + 2}$ หรืออาจกล่าวว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคือ $x - 4$ และเหลือเศษเท่ากับ 9 ❑

**ตัวอย่าง ผ.1.2** กำหนดให้ $P(x) = x^3 + 3x - 1$ และ $Q(x) = x - 1$ จงหาผลลัพธ์ของการหาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$

**วิธีทำ** จากพหุนามที่กำหนดให้ นำมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 3 & -1 \\
x = 1 & \downarrow & & & \\
\hline
 & 1 & & & \\
\end{array}
$$

นำ 1 ที่เป็นตัวหารมาคูณกับ 1 ที่เป็นตัวตั้งได้ผลลัพธ์เท่ากับ 1 นำไปใส่ไว้ใต้เลข 0 แล้วนำ 0 ไป บวกกับ 1 นำผลลัพธ์ไปใส่ไว้ใต้เส้นขวาง

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 3 & -1 \\
x = 1 & \downarrow & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & & \\
\end{array}
$$

นำ 1 ที่เป็นตัวหารไปคูณกับ 1 ที่เป็นผลลัพธ์จากขั้นตอนก่อนหน้านี้ ได้เท่ากับ 1 นำไปใส่ไว้ใต้เลข 3 จากนั้นนำ 3 ไปบวกกับ 1 นำผลลัพธ์ทีได้ไปใส่ไว้ใต้เส้นขวาง

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 3 & -1 \\ x=1 & \downarrow & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \end{array}$$

ในขั้นตอนสุดท้าย นำตัวหารคือ 1 ไปคูณกับ 4 ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากขั้นตอนก่อนหน้านี้ได้เท่ากับ 4 นำไปใส่ไว้ใต้เลข $-1$ จากนั้นนำ $-1$ ไปบวกกับ 4 ได้เท่ากับ 3 นำไปใส่ไว้ใต้เส้นขวาง

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 3 & -1 \\ x=1 & \downarrow & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

จากแผนภาพข้างต้น จะได้ว่าผลลัพธ์จากการหารคือ $x^2+x+4$ และเหลือเศษเท่ากับ 3 ❑

**ตัวอย่าง ผ.1.3** จงหาผลลัพธ์จากการหารพหุนาม $x^4-3x^3+2x^2-x+1$ ด้วยพหุนาม $x^2-4$

**วิธีทำ** เนื่องจากตัวหารเป็นพหุนามดีกรีสอง จึงต้องแยกตัวประกอบเสียก่อนได้เท่ากับ $(x-2)(x+2)$ ดังนั้น จะได้ว่าเราต้องหาผลลัพธ์จากการหาร $x^4-3x^3+2x^2-x+1$ ด้วย $(x-2)(x+2)$ เลือก $(x-2)$ เป็นตัวหารครั้งแรก นำไปเขียนแผนภาพการสังเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ x=2 & \downarrow & 2 & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

จากแผนภาพ เราได้สัมประสิทธิ์ของพหุนามที่ได้จากการหารครั้งแรกด้วย $x-2$ ต่อไปเราจะหารครั้งที่สองด้วยพหุนาม $x+2$ ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ x=-2 & \downarrow & -2 & 6 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -13 & 25 \end{array}$$

เพราะฉะนั้น การหารพหุนาม $x^4-3x^3+2x^2-x+1$ ด้วย $x^2-4$ ได้ผลลัพธ์คือ $x^2-3x+6$ และเหลือเศษเท่ากับ $-13x+25$ ❑

## 2. อนุกรมกำลัง (Power Series)

**บทนิยาม**

***อนุกรมกำลัง (Power Series)*** คือ อนุกรมอนันต์ที่อยู่ในรูป $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(x - x_0\right)^k$ โดยที่ $x_0$ คือ จำนวนจริงใดๆ เรียกว่า จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง และ $c_k$ คือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ k ของอนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลังนำมาใช้ประโยชน์ในการเขียนฟังก์ชันอดิศัย (transcendental function) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง ซึ่งจะทำให้นำไปใช้งานได้สะดวกมากยิ่งขึ้น แต่ก่อนที่จะไปถึงจุดนั้นเรามาพิจารณากระบวนการต่อไปนี้

กำหนดให้ $y = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(x - x_0\right)^k$

$= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + c_4(x - x_0)^4 + \dots$ ---(ผ.2.1)

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้ว่า $y' = f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_2(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \dots$ -----(ผ.2.2)

หาอนุพันธ์อันดับสองจะได้ว่า $y'' = f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \dots$ -----(ผ.2.3)

หาอนุพันธ์อันดับสามจะได้ว่า $y''' = f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x - x_0) + \dots$ -----(ผ.2.4)

$\dots \qquad \dots$

หาอนุพันธ์อันดับ k จะได้ว่า $y^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) = k!c_k \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$ -----(ผ.2.5)

สมการ (ผ.2.5) คือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ k ของอนุกรมกำลังที่กำหนดให้ ดังนั้น จากบทนิยามข้างต้นเราอาจเขียนอนุกรมนี้ใหม่ได้คือ $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k$ -----(ผ.2.6)

ซึ่งสมการ (ผ.2.6) เรียกว่า ***อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series)*** รอบจุด $x = x_0$ และถ้าเราแทนค่า $x_0 = 0$ แล้วจะได้ว่าสมการ (ผ.2.6) สามารถเขียนใหม่ได้ $M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ -----(ผ.2.7)

สมการ (ผ.2.7) เรียกว่า ***อนุกรมแมคคลอริน (McClaurin's Series)***

**ตัวอย่าง ผ.2.1** กำหนดให้ $f(x) = e^x$ จงเขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด $x_0 = 0$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(k)}(x) = e^x$

แทนค่าลงในสมการ (ผ.2.7) ได้ว่า

$$M(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

หรืออาจเขียนในรูปแบบปิด (closed form) ได้คือ $M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ❑

**ตัวอย่าง ผ.2.2** กำหนดให้ $f(x) = \sin 2x$ จงเขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด $x_0 = 0$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(x) = \sin 2x$, $f'(x) = 2\cos 2x$, $f''(x) = -4\sin 2x$, $f'''(x) = -8\cos 2x$,

$f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$, $f^{(5)}(x) = 32\cos 2x$

แทนค่าลงในสมการ (ผ.2.7) จะได้ว่า

$$M(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \ldots$$

$$= 0 + 2x + 0 - \frac{8}{3!}x^3 + 0 + \frac{32}{5!}x^5 + \ldots$$ ❑

ଓଃ ଓଃ ଓଃ ଓଃ ଓଃ ଓଃ

## 3. อนุพันธ์ของฟังก์ชันบางตัว

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ x (u(x)) แล้วจะได้ว่า

| **f(u)** | **f′(u)** |
|---|---|
| $e^u$ | $e^u \frac{du}{dx}$ |
| $\sin u$ | $\cos u \frac{du}{dx}$ |
| $\cos u$ | $-\sin u \frac{du}{dx}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$ |

ଓଃ ଓଃ ଓଃ ଓଃ ଓଃ ଓଃ

# บรรณานุกรม


กรรณิกา กวักเพฑูรย์. **หลักคณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

ชมรมบัณฑิตแนะแนว. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 46**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2546.

______________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 47**. กรุงเทพฯ : รุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์, 2547.

______________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 48**. กรุงเทพฯ : รุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์, 2548.

พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์. **สมการเชิงอนุพันธ์**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ : นำอักษรการพิมพ์, 2545.

อเนก หิรัญ. **รวมหลักคณิตศาสตร์ ม.4 (ค 011, ค 012)**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2539.