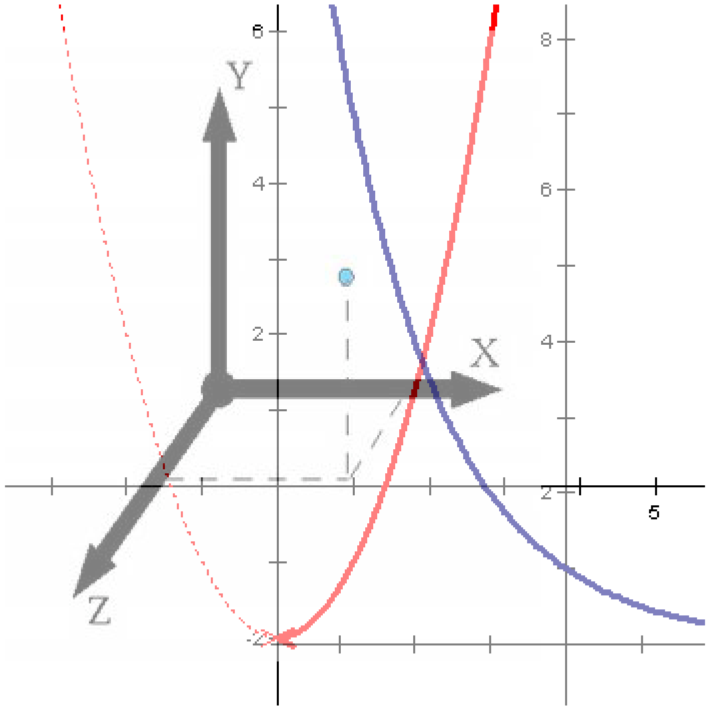
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
(Mathematical Relations and Functions)



หนังสือเรียนออนไลน์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ชุด “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” เล่มที่ 5

สัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

คำนำในการปรับปรุงครั้งแรก

“การปรับปรุงในครั้งนี้เป็นครั้งแรกนับจากมีการเผยแพร่หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้บน “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” โดยเป็นการปรับปรุงคำอธิบายในบทที่ 3 อัตราส่วนตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติ นอกจากนี้ยังได้เพิ่มเติมตัวอย่าง รวมถึงแบบฝึกหัดเอาไว้เพื่อให้ผู้อ่านได้ทบทวนความรู้ที่ได้ศึกษาไปแล้ว

ผู้เขียนหวังว่าการปรับปรุงในครั้งนี้จะมีประโยชน์กับผู้อ่านบ้างพอสมควร หากผู้อ่านมีคำแนะนำก็สามารถติดต่อกับผู้เขียนได้ตามที่อยู่อีเมล์ซึ่งให้ไว้แล้วบนเว็บไซต์”

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

19 กันยายน พ.ศ. 2552

คำนำ

"หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นเล่มที่ 5 จากจำนวนทั้งหมด 15 เล่ม ซึ่งเล่มนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยจะเน้นการให้ความหมายและทฤษฎีบทต่างๆ พร้อมทั้งการพิสูจน์ให้เหมาะสมกับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เริ่มต้นจากบทที่ 1 จะเป็นการแนะนำให้รู้จักกับความสัมพันธ์ โดยเริ่มต้นจากผลคูณคาร์ทีเซียน แล้วนำไปสู่การนิยามความสัมพันธ์ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ผกผันของความสัมพันธ์ จากนั้นจะนำไปสู่บทที่ 2 ได้แก่เรื่องฟังก์ชัน ซึ่งจะเริ่มต้นตั้งแต่ความหมายทั่วๆ ไปของฟังก์ชัน ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันประกอบ ผกผันของฟังก์ชัน และปิดท้ายด้วยพีชคณิตของฟังก์ชัน

ในบทที่ 3 จะเป็นเรื่องราวของอัตราส่วนตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยในเบื้องต้นจะศึกษาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก่อน แล้วค่อยๆ ขยายแนวคิดไปสู่วงกลมหนึ่งหน่วย ฟังก์ชันตรีโกณมิติชนิดต่างๆ เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมประกอบ กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดๆ แล้วปิดท้ายด้วยผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สำหรับบทที่ 4 ซึ่งเป็นบทส่งท้ายของหนังสือเล่มนี้ จะกล่าวถึงฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล หรือฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยจะเริ่มต้นจากนิยามพื้นฐาน กราฟของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล หลังจากนั้นจะพิจารณาเกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึมซึ่งเป็นผกผันของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล โดยเริ่มต้นจากนิยามพื้นฐาน กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม สมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึม ลอการิทึมธรรมชาติ สมการและอสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล แล้วปิดท้ายด้วยสมการและอสมการลอการิทึม

ผู้เขียนหวังว่า หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้จะยังประโยชน์ให้แก่นักเรียนตลอดจนผู้สนใจบ้างไม่มากก็น้อย หากผู้อ่านมีข้อเสนอแนะประการใดก็สามารถติดต่อกับผู้เขียนได้ตามอีเมล์ที่ได้ให้ไว้แล้วบนเว็บไซต์"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

14 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2549

สารบัญ

บทที่ 1
ความสัมพันธ์

1.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

บทนิยาม 1.1
กำหนดให้ A, B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียน คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$ จงหาค่าของ $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ ตามลำดับ

วิธีทำ โดยบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$

$B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

และ $B \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ ❑

จากตัวอย่างที่ 1.1 จะเห็นได้ว่ามีสิ่งที่น่าสังเกตหลายประการ เช่น $A \times B \neq B \times A$ เป็นต้น ซึ่งสำหรับกรณีทั่วๆ ไปเราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1
กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตใดๆ และ n(A), n(B) เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และเซต B ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

1) $A \times B \neq B \times A$
2) $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
3) $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
4) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
5) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
6) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
7) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

พิสูจน์ ในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 2), 3), 4), 5), 6) และ 7) ดังนี้

2) ($\Rightarrow$) ให้ $(x, y) \in A \times B$ สมมติว่า $A \times B = B \times A$

จากเรื่องเซตจะได้ว่า $x \in A \Rightarrow x \in B$ แสดงว่า $A \subseteq B$

และในทางกลับกัน ก็จะได้ว่า $B \subseteq A$ นั่นคือ $A = B$

และเนื่องจากว่า ϕ เป็นสับเซตของทุกเซต ย่อมได้ว่า $\phi = A$ ด้วยหรือ $\phi = B$

($\Leftarrow$) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ $\Rightarrow$

จึงสรุปได้ว่า $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$

3) $A \times \phi \Leftrightarrow x \in A$ และ $x \in \phi$

$\Leftrightarrow x \in \phi$ และ $x \in A \Leftrightarrow x \in \phi \Leftrightarrow \phi$

$\Leftrightarrow \phi \times A$

4) กำหนดให้ A, B มีสมาชิก $n(A), n(B)$ ตัว ตามลำดับ

จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in A$ สามารถจับคู่กับสมาชิก $y \in B$

ได้จำนวนวิธีเท่ากับ $n(A) \cdot n(B)$ นั่นคือ $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

5) ($\subseteq$) กำหนดให้ $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

($\supseteq$) กำหนดให้ $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) &\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

จึงสรุปได้ว่า $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ตามต้องการ

6) ($\subseteq$) กำหนดให้ $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C) \quad \text{(Idempotent)}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \in A \times C)$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

ดังนั้น $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

($\supseteq$) กำหนดให้ $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ $\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \in A \times C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A) \wedge (y \in B \cap C)$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

ดังนั้น $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

สรุปได้ว่า $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

7) ($\subseteq$) กำหนดให้ $(x, y) \in A \times (B - C)$

$(x, y) \in A \times (B - C)$ $\Leftrightarrow$ $(x \in A) \wedge y \in (B - C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A) \wedge (y \in (B \cap C'))$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$ (Idempotent)

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)$

$\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \notin A \times C)$

$\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \in (A \times C)')$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)'$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$

ดังนั้น $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$

($\supseteq$) กำหนดให้ $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$

$(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$ $\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times B) \cap ((x, y) \notin A \times C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \wedge y \in B) \cap (x \in A \wedge y \notin C)$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C')$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \wedge (y \in B \cap C')$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \wedge y \in (B - C)$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in A \times (B - C)$

ดังนั้น $(A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C)$

จึงสามารถสรุปได้ว่า $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ ❑

แบบฝึกหัด 1.1

1. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ จงหา $A \times B$
2. กำหนดให้ $A = \{x \mid x \in N$ และ $x \leq 10\}$, $B = \{y \mid y \in N$ และ $y \leq 0\}$ จงหา $n(A \times B)$
3. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จงแสดงว่า
   $(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$

1.2 ความสัมพันธ์ (Relation)

บทนิยาม 1.2
กำหนดให้ A, B เป็นเซตใดๆ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เมื่อ $r \subseteq A \times B$

ตัวอย่างที่ 1.2 จากตัวอย่างที่ 1.1 เราทราบว่า $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$ ถ้ากำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$ เราสามารถเขียน r_1 แบบแจกแจงสมาชิกได้คือ $\{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$ จะเห็นได้ว่า $r_1 \subseteq A \times B$ สอดคล้องตามบทนิยาม 1.2 ❑

<u>**ข้อสังเกต**</u> จากเรื่องเซต เราทราบว่าการเขียนเซตทำได้ 2 แบบคือ การเขียนแบบแจกแจงสมาชิก กับแบบบอกเงื่อนไข ในทำนองเดียวกัน ความสัมพันธ์ก็จัดเป็นเซตรูปแบบหนึ่ง เพราะฉะนั้นจึงสามารถเขียนได้ทั้งแบบแจกแจงสมาชิก และแบบบอกเงื่อนไข

ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องอื่นๆ เกี่ยวกับความสัมพันธ์ จะต้องมาพิจารณาคำศัพท์อีก 2 คำก่อนดังนี้

บทนิยาม 1.3

1) ***โดเมน (Domain)*** ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย D_r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ (x, y) ใดๆ ซึ่งเป็นสมาชิกของ r หรือนิยามโดยทั่วไปคือ $D_r = \{x \mid \exists y \in B$ และ $(x, y) \in r\}$

2) ***เรนจ์ (Range)*** ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย R_r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ (x, y) ใดๆ ซึ่งเป็นสมาชิกของ r หรือนิยามโดยทั่วไปคือ $R_r = \{y \mid \exists x \in B$ และ $(x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 1.3 จากตัวอย่างที่ 1.2 เราได้ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$
ดังนั้น $D_r = \{1, 2, 3\}$ และ $R_r = \{0, 1\}$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้ $A = \{x \in I^+ \mid 3|x$ และ $x \leq 10\}$, $B = \{y \in I^+ \mid 2|y$ และ $y \leq 10\}$
และให้ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 12\}$ จงหา D_r, R_r ตามลำดับ

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์กำหนดเซต A, B มาให้ในรูปแบบบอกเงื่อนไข ดังนั้น เพื่อความสะดวกเราอาจเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแจกแจงสมาชิกได้คือ $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ จะได้ว่า

$A \times B = \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (6, 2)\ (6, 4), (6, 6), (6, 8)\ (6, 10), (9, 2), (9, 4)\ (9, 6), (9, 8), (9, 10)\}$

นั่นคือ $r = \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (6, 2), (6, 4)\}$ เพราะฉะนั้น $D_r = \{3, 6\}$, $R_r = \{2, 4, 6, 8\}$
หรืออาจตอบในรูปของเซตที่บอกเงื่อนไขคือ

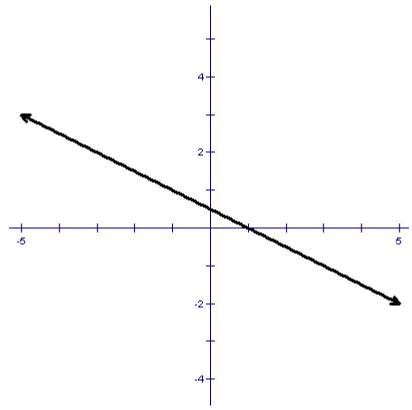
$D_r = \{x \mid 3|x$ และ $x \leq 6\}$, $R_r = \{y \mid 2|y$ และ $y \leq 8\}$ ❑

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.3 และตัวอย่างที่ 1.4 จะเห็นได้ว่าสำหรับความสัมพันธ์ $r \subseteq A \times B$ ใดๆ $D_r \subseteq A$ และ $R_r \subseteq B$ เสมอ

ต่อไปเราจะพิจารณาความสัมพันธ์ $r \subseteq R \times R$ โดยต่อไปนี้หากไม่ได้กำหนดเป็นอย่างอื่น ความสัมพันธ์ที่เราจะพิจารณาจะเป็นสับเซตของ $R \times R$ เสมอ และสำหรับการพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ในลักษณะนี้ สามารถทำได้โดยการเขียน y ในรูปของ x เมื่อจะหาโดเมน และเขียน x ในรูปของ y จากนั้นทำการจัดรูปอีกเล็กน้อยให้ได้ y ในรูปของ x เมื่อจะหาเรนจ์

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$ จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r ที่กำหนดให้พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ด้วย

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ r ที่กำหนดให้เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น (linear relation) หรือความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง ดังรูป



ต่อไปพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

$\Rightarrow$ หา D_r; $x + 2y = 1$

$$2y = 1 - x$$

$$y = \frac{1 - x}{2}$$

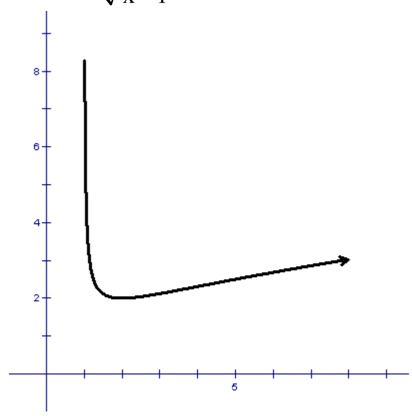
จะเห็นว่า ทุกค่า $x \in R$ สามารถหาค่า y ได้เสมอ เพราะฉะนั้น $D_r = R$

$\Rightarrow$ หา R_r; $x + 2y = 1$

$$x = 1 - 2y$$

จะเห็นได้ว่า สำหรับ $y \in R$ บางตัว สามารถหาค่า $x \in R$ ได้เสมอ เพราะฉะนั้น $R_r = R$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r



วิธีทำ จาก $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ จะเห็นว่า $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ จะได้ $D_r = (1, \infty)$

พิจารณา $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ต้องการหาเรนจ์ของ r จึงเขียน x ในรูปของ y

โดยให้ $x = \frac{y}{\sqrt{y-1}}$ จะได้ว่า $x\sqrt{y-1} = y$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างได้ $x^2(y-1) = y^2 \Rightarrow \mathbf{y^2 - x^2y + x^2 = 0}$

แก้สมการในเทอมของ y ได้ $y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2(x^2-4)}}{2}$

นิพจน์ $\sqrt{x^2(x^2-4)} \geq 0$ แก้อสมการได้ $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

แต่ $\frac{x}{\sqrt{x-1}} > 0$ สำหรับทุกค่า x ดังนั้น $\{(-\infty,-2] \cup [2,\infty)\} \cap [0,\infty) = [2,\infty)$

จะได้ว่า $R_r = [2,\infty)$ ❑

☙ ☙ ☙ ☙ ☙ ☙

1.3 ผกผันของความสัมพันธ์

บทนิยาม 1.4
กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B แล้ว r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A
นั่นคือ $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = \frac{5-2x}{3}\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.4 จะเห็นว่า เพียงแต่เราสลับ x เป็น y และสลับ y เป็น x ก็จะได้ผกผันของความสัมพันธ์ที่ต้องการ ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \mid x = \frac{5-2y}{3}\}$

หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูปของ x ก็ได้ ดังนี้

=> จาก $x = \frac{5-2y}{3}$ จะได้ว่า $3x = 5 - 2y$

$2y = 5 - 3x$ ดังนั้น $y = \frac{5-3x}{2}$

นั่นคือ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{5-3x}{2}\}$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = x^2 - 3x + 2$ สำหรับทุก $x > 0\}$ จงหา r^{-1} โดยเขียนในรูปของ x

วิธีทำ จาก $y = x^2 - 3x + 2$ จะได้ว่า $x = y^2 - 3y + 2$

$x - 2 = y^2 - 3y = (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$ => $x + \frac{1}{4} = (y - \frac{3}{2})^2$

=> $y - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{x + \frac{1}{4}}$ => $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

จะได้ว่า $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}}\}$ ❑

<u>**ข้อสังเกต**</u> ผกผันของความสัมพันธ์อาจมีได้มากกว่าหนึ่งก็ได้

ความสัมพันธ์ที่เราได้พิจารณามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้พิจารณาเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ และสำหรับผกผันของความสัมพันธ์ก็เป็นไปในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ สามารถหาโดเมนและเรนจ์ได้ด้วย

บทนิยาม 1.5

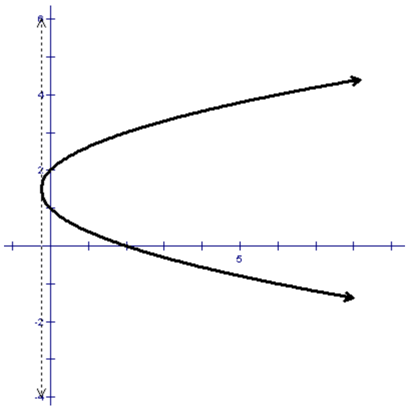
กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B และ D_r, R_r คือโดเมนและเรนจ์ของ r แล้วจะได้ว่า

1) $D_{r^{-1}} = R_r$

2) $R_{r^{-1}} = D_r$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r^{-1} ในตัวอย่างที่ 1.8

วิธีทำ



จาก $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}}\}$ จะเห็นได้ชัดว่า

$D_{r^{-1}} = \{x \mid x \geq -\frac{1}{4}\}$ และ $R_{r^{-1}} = \{y \mid y \geq \frac{3}{2}\}$ ❑

ɞ ɞ ɞ ɞ ɞ ɞ

บทที่ 2
ฟังก์ชัน

2.1 ฟังก์ชัน

2.1.1 นิยามพื้นฐานของฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1

1) ฟังก์ชัน (Function) คือ ความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขว่า สำหรับคู่อันดับใดๆ ที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์นั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย

2) โดเมนของฟังก์ชัน (Domain) หมายถึง เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของฟังก์ชัน

3) เรนจ์ของฟังก์ชัน (Range) หมายถึง เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของฟังก์ชัน

จากบทนิยาม 2.1 การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน มีหลักเกณฑ์การพิจารณาอย่างง่ายๆ ดังนี้

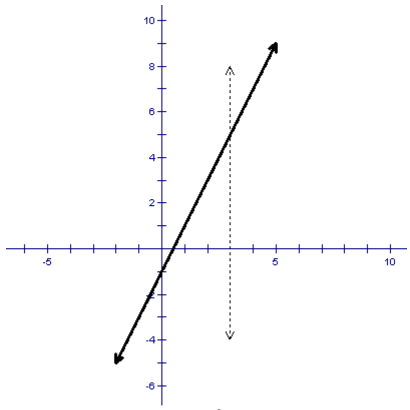
1) ถ้าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นเซตของคู่อันดับ ให้พิจารณาว่าสำหรับแต่ละคู่อันดับ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันแล้ว มีสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใดแตกต่างกันบ้าง ถ้ามีจะกล่าวว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

2) ถ้าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นเซตแบบบอกเงื่อนไข ให้พยายามวาดกราฟของความสัมพันธ์นั้นแล้วให้ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งขนานกับแกน Y มาตัดกับกราฟของความสัมพันธ์นั้น ถ้าเส้นตรงกับกราฟของความสัมพันธ์มีจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว จะกล่าวว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับคู่อันดับ $(x, y) \in f$ อาจเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ ก็ย่อมได้

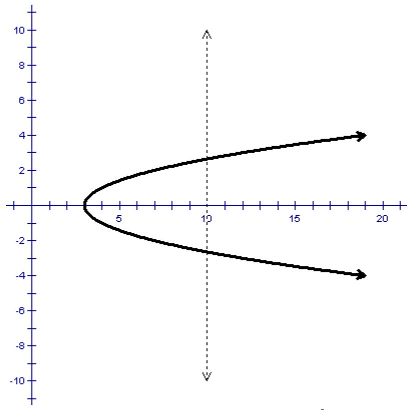
ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$, $r_2 = \{(x, y) \mid x = y^2 + 3\}$, $r_3 = \{(x, y) \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\}$
จงใช้บทนิยาม 1.1 พิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ จาก $r_1 = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$ จะเห็นว่ากำหนดเป็นเซตแบบบอกเงื่อนไข ซึ่งนำเงื่อนไขมาวาดกราฟได้ดังนี้



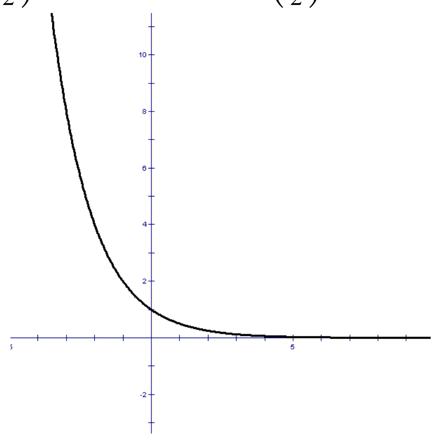
จากรูป เส้นทึบ ได้แก่ เส้นตรง $y = 2x - 1$ เมื่อลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ขนานกับแกน Y จะเห็นได้ว่าเส้นตรงนี้ตัดกับกราฟของเส้นตรง $y = 2x - 1$ เพียงจุดเดียว เพราะฉะนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน ❑

จาก $r_2 = \{(x, y) \mid x = y^2 + 3\}$ นำเงื่อนไข $x = y^2 + 3$ มาวาดกราฟได้ดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าเส้นทึบคือกราฟของ $x = y^2 + 3$ เมื่อลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ขนานกับแกน Y และให้ตัดกราฟของความสัมพันธ์นี้จะพบว่าเส้นตรงนี้ตัดกราฟมากกว่า 1 จุดจึงสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ไม่เป็นฟังก์ชัน ❑

จาก $r_3 = \{(x, y) \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\}$ นำเงื่อนไข $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ มาวาดกราฟได้ดังนี้



จากรูป เส้นทึบคือกราฟของ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ เมื่อลากเส้นตรง $x = 0$ จะพบว่าเส้นตรงนี้ตัดกราฟเพียงจุดเดียว แสดงว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้นี้เป็นฟังก์ชัน ❑

โดยทั่วไป เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2
ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B (function from A to B) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \to B$ ก็ต่อเมื่อ

1) $D_f = A$
2) $\forall x \in A,\ \forall y, z \in B,\ [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z]$

ถ้าเรามีฟังก์ชันอยู่ 2 ฟังก์ชันคือ $f: A \to B$ กับ $g: A \to B$ เราสามารถตรวจสอบได้อย่างง่ายๆ ว่า $f = g$ หรือไม่โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1
กำหนดให้ $f: A \to B$ และ $g: A \to B$ แล้ว $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in A$

พิสูจน์ กำหนดให้ $f: A \to B$ และ $g: A \to B$

($\Rightarrow$) สมมติว่า $f = g$ จะแสดงว่า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in A$
จะได้ว่ามี $y \in B$ ที่ซึ่ง $(x, y) \in f$
แต่ $f = g$ จะได้ว่า $(x, y) \in g$
ดังนั้น $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เพราะฉะนั้น $f(x) = g(x)$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $f(x) = g(x)$
($\subseteq$) ให้ $(x, y) \in f$ แสดงว่า $x \in A$ และ $y \in B$ และ $y = f(x)$
แต่จากข้อสมมติจะได้ว่า $y = g(x)$ ด้วย
นั่นคือ $(x, y) \in g$ เพราะฉะนั้น $f \subseteq g$
($\supseteq$) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ $\subseteq$
จากที่แสดงมา สรุปได้ว่า $f = g$

เพราะฉะนั้น จากที่แสดงมาทั้งสองตอน จึงสรุปได้ว่าทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ❑

2.1.2 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง

บทนิยาม 2.3

1) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B (injective function from A to B or 1 – 1 function) หมายถึง ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดยที่สำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$

2) ฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไปยัง B (surjective function from A to B or onto function) หมายถึง ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดยที่ $D_f = A$ และ $R_f = B$

3) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไปยัง B (bijective function) หมายถึง ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ที่มีคุณสมบัติว่าเป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง

การตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่นั้น เราอาจตรวจสอบได้อย่างง่ายๆ คือ

1) ใช้วิธีทางพีชคณิต กล่าวคือ ใช้การจัดรูปสมการ แล้วสรุปให้ได้ตามบทนิยาม 2.3
2) ใช้วิธีทางเรขาคณิต กล่าวคือ ใช้การวาดกราฟของฟังก์ชัน แล้วลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน X ถ้าเส้นตรงดังกล่าวตัดกราฟมากกว่า 1 จุด จะสรุปว่าฟังก์ชันนั้นไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ จงพิจารณาว่า f ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ 1) ใช้วิธีทางพีชคณิต

ให้ $x_1, x_2 \in D_f$ สมมติว่า $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1-1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2-1}}$$

$x_1\sqrt{x_2-1} = x_2\sqrt{x_1-1}$ ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการได้ว่า

$$x_1^2(x_2-1) = x_2^2(x_1-1)$$

$$x_1^2x_2 - x_1^2 = x_2^2x_1 - x_2^2$$

$$x_1^2x_2 + x_2^2 = x_2^2x_1 + x_1^2$$

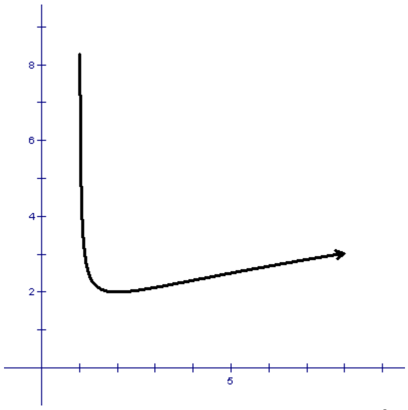
$$x_2(x_1^2 + x_2) = x_1(x_2^2 + x_1)$$

จะเห็นได้ว่า $x_1 \neq x_2$

เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ❑

2) ใช้วิธีทางเรขาคณิต

จาก $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ วาดกราฟได้ดังนี้



จากรูป เส้นทึบคือกราฟของ $y = f(x)$ จะเห็นได้ว่า เมื่อลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน X แล้ว จะพบว่า เส้นตรงนี้จะตัดกราฟมากกว่า 1 จุด จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นี้ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ❑

แบบฝึกหัด 2.1

1. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x + 3\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ถ้า r ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันแล้ว จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ര ര ര ര ര ര

2.2 ฟังก์ชันเพิ่ม – ฟังก์ชันลด

บทนิยาม 2.4

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไปยัง R และให้ $A \subseteq D_f$

1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) ใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

2) f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) ใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2$ เมื่อ $x \in [0, 3]$ จงแสดงว่า f(x) ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

วิธีทำ กำหนดให้ $x_1, x_2 \in [0, 3]$ และ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$3x_1^2 < 3x_2^2$$

$$3x_1^2 - 2 < 3x_2^2 - 2$$

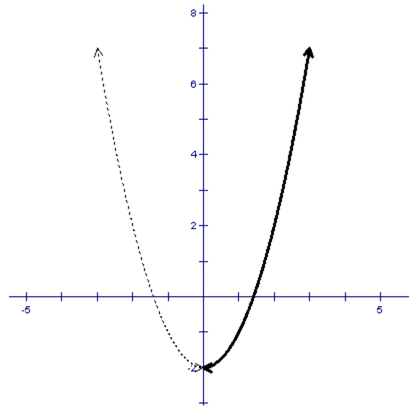
ดังนั้น $f(x_1) < f(x_2)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง [0, 3] ❑

การตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดนั้น นอกจากจะทำโดยวิธีทางพีชคณิตคือตามบทนิยาม 2.4 แล้ว ยังตรวจสอบได้จากการวาดกราฟของฟังก์ชัน (ถ้ากราฟนั้นวาดได้ง่าย) พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.4 จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 2.3 จงวาดกราฟของ y = f(x) พร้อมทั้งพิจารณาว่าในช่วง [–3, 3] เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

วิธีทำ จาก $y = f(x) = x^2 - 2$ นำมาวาดกราฟได้ดังนี้



จากรูป จะเห็นว่าเป็นกราฟของ $y = x^2 - 2$ สำหรับทุก $x \in [-3, 3]$ แต่แบ่งออกเป็น 2 ช่วงคือ $[-3, 0]$ ซึ่งแทนด้วยกราฟเส้นประกับช่วง $[0, 3]$ ซึ่งแทนด้วยกราฟเส้นทึบ หากพิจารณาในช่วง $[0, 3]$ เมื่อ x เพิ่มขึ้นจะพบว่า f(x) เพิ่มขึ้นด้วย จึงสรุปได้ว่า สำหรับฟังก์ชัน f ในช่วง $[0, 3]$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาในช่วง $[-3, 0]$ เมื่อแทนค่า x ให้ลดลงเรื่อยๆ f(x) จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ หรือในทางกลับกัน หากให้ x เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จะพบว่า f(x) จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ เช่นกัน เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า $f(x) = x^2 - 2$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $[-3, 0]$ ❑

แบบฝึกหัด 2.2

1. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ จงแสดงว่า f(x) เป็นฟังก์ชันลดสำหรับทุก $x \in [0, 2]$
2. กำหนดให้ $f(x) = 4x^2 - 3$ จงแสดงว่าว่าสำหรับทุก $x \in [0, 1]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
3. จงแสดงว่าคำตอบของท่านในข้อ 1 และข้อ 2 เป็นจริง โดยใช้กราฟ

2.3 ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

บทนิยาม 2.5
กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ แล้ว $gof: A \rightarrow C$

<u>**ข้อสังเกต**</u>

1. จากบทนิยาม 2.5 เราจะได้ว่า $D_{gof} = A$

2. โดยทั่วไป ฟังก์ชันประกอบของ f และ g จะมีหรือไม่นั้น เราสามารถตรวจสอบได้อย่างง่ายๆ ว่าถ้า $R_f \cap D_g \neq \phi$ แล้วสามารถหาฟังก์ชันประกอบของ f และ g ได้แน่นอนและในทางกลับกันฟังก์ชันประกอบของ g และ f จะมีหรือไม่นั้น เราจะต้องตรวจสอบว่าถ้า $R_f \cap D_g \neq \phi$ แล้วเราสามารถหาฟังก์ชันประกอบของ g และ f ได้แน่นอน ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ จะทำให้เข้าใจได้ดียิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2 + 3$ จงพิจารณาว่าจะหา gof ได้หรือไม่ ถ้าหาได้ก็หา gof ดังกล่าว

วิธีทำ เนื่องจาก $R_f = R$ และ $D_g = R$ ซึ่ง $R_f \cap D_g \neq \phi$ แสดงว่ามี gof

ดังนั้น โดยบทนิยาม 2.5 จะได้ว่า
$$\begin{aligned} gof(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

$= 4x^2 + 4x + 1 + 3$

$= 4x^2 + 4x + 4$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.6 จากฟังก์ชัน f และ g ในตัวอย่างที่ 2.5 จงพิจารณาว่าจะหา fog ได้หรือไม่ ถ้าหาได้ก็ให้หา fog ดังกล่าว

วิธีทำ เนื่องจาก $R_g = [3, \infty)$ และ $D_f = R$ ซึ่ง $R_g \cap D_f \neq \phi$ แสดงว่ามี fog

ดังนั้น โดยบทนิยาม 2.5 จะได้ว่า $fog(x) = f(g(x))$

$= f(x^2 + 3)$

$= 2(x^2 + 3) + 1$

$= 2x^2 + 6 + 1$

$= 2x^2 + 7$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ และ $g(x) = x - 2$ จงพิจารณาว่ามีฟังก์ชันประกอบของ g และ f หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $R_g \cap D_f = R \cap [R - \{-1, 3\}] = R - \{-1, 3\} \neq \phi$ แสดงว่ามี fog

จาก $fog(x) = f(g(x)) = f(x - 2)$

$= \frac{1}{(x-2)^2 - 2(x-2) - 3}$

$= \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.8 จากตัวอย่างที่ 2.7 จงหาค่าของ fog(0)

วิธีทำ จาก $fog(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$

จะได้ว่า $fog(0) = \frac{1}{0^2 - 6(0) + 5} = \frac{1}{5}$ ❑

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการยืนยันว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการ เราสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชันประกอบเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง

ทฤษฎีบท 2.2
ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ และมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง แล้วจะได้ว่า $gof: A \rightarrow C$ จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึงบนเซต C

พิสูจน์ 1) จะแสดงว่า $\forall x_1, x_2 \in A, [gof(x_1) = gof(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

ให้ $x_1, x_2 \in A$ จะได้ว่ามี $y \in C$ ที่ซึ่ง $(x_1, y) \in gof$ และ $(x_2, y) \in gof$

ดังนั้น $y = gof(x_1)$ และ $y = gof(x_2)$

จะได้ $gof(x_1) = gof(x_2)$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $f(x_1) = f(x_2)$

และในทำนองเดียวกัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $x_1 = x_2$ ตามต้องการ

2) จะแสดงว่า $R_{gof} = C$

($\subseteq$) ให้ $y \in R_{gof}$ จะได้ว่ามี $x \in A$ และ $z \in B$ ที่ซึ่ง $(x, z) \in f$ และ $(z, y) \in g$

ดังนั้น $y = g(z)$

เพราะฉะนั้น $y \in C$

($\supseteq$) ให้ $y \in C$ จะได้ว่า มี $x \in A$ ที่ซึ่ง $(x, y) \in gof$

ดังนั้น $y = gof(x)$

เพราะฉะนั้น $y \in R_{gof}$

สรุปได้ว่า $R_{gof} = C$ ตามต้องการ ❑

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ จงแสดงว่า $gof: A \rightarrow C$ และ $D_{gof} = A$
2. ให้ $f: A \rightarrow B$ โดยที่มีสมบัติทั่วถึงบนเซต B และให้ $g: B \rightarrow C$, $h: B \rightarrow C$ จงแสดงว่าถ้า $gof = hof$ แล้ว $g = h$

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

2.4 ผกผันของฟังก์ชัน

2.4.1 ผกผันของฟังก์ชันโดยทั่วไป

เราทราบมาแล้วว่า ฟังก์ชันเป็นรูปแบบหนึ่งของความสัมพันธ์ ดังนั้น เราจึงสามารถหาผกผันของฟังก์ชันได้เช่นกัน แต่ทั้งนี้ไม่จำเป็นว่าทุกฟังก์ชันจะมีผกผันเสมอไป โดยเรามีทฤษฎีบทอันหนึ่งเพื่อยืนยันคำกล่าวนั้น ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3
ให้ $f: A \rightarrow B$ แล้ว $f^{-1}: B \rightarrow A$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต B

พิสูจน์ 1) จะแสดงว่า ถ้า $f^{-1}: B \rightarrow A$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต B

1.1) จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $y_1, y_2 \in A$ จะได้ว่า $(y_1, x) \in f^{-1}$ และ $(y_2, x) \in f^{-1}$

ดังนั้น $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$

$y_1 = f(x)$ และ $y_2 = f(x)$

เพราะฉะนั้น $y_1 = y_2$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งตามต้องการ

1.2) ให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

2) จะแสดงว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต B แล้ว $f^{-1}: B \rightarrow A$

ให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด ❑

ตัวอย่างที่ 2.9 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้นี้มีผกผันหรือไม่

วิธีทำ โดยการวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะพบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นี้ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงขาดสมบัติตามทฤษฎีบท 2.2 จึงสรุปว่าฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ไม่มีผกผัน ❑

ตัวอย่างที่ 2.10 กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดยที่ $g(x) = x^3 + 1$ จงพิจารณาว่า g มีผกผันหรือไม่

วิธีทำ 1) ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

ให้ $x_1, x_2 \in D_g$ และให้ $g(x_1) = g(x_2)$

จะได้ว่า $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$

$x_1^3 = x_2^3$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ ฟังก์ชัน g ที่กำหนดให้นี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) ตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

ก. $D_g = A$ หรือไม่

$\Rightarrow$ เป็นจริง ตามบทนิยามของฟังก์ชัน

ข. $R_g = B$ หรือไม่

$\Rightarrow$ $R_g \subseteq B$ เป็นจริง ตามบทนิยามของฟังก์ชัน

$\Rightarrow$ $B \subseteq R_g$

ให้ $y \in B$ จะได้ว่ามีบาง $x \in A$ ที่ซึ่ง $(x, y) \in g$

ดังนั้น $y = g(x)$ นั่นคือ $y \in R_g$

สรุปว่า $R_g = B$ ตามต้องการ

จากที่พิจารณาทั้งข้อ 1) และข้อ 2) สรุปได้ว่า g มีผกผัน ❑

แบบฝึกหัด 2.4 ก

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 1.2) และข้อ 2) เป็นจริง
2. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน f ในตัวอย่างที่ 2.9 ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งโดยใช้กราฟ
3. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน g ในตัวอย่างที่ 2.10 เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งโดยใช้กราฟ
4. จากตัวอย่างที่ 2.10 เราได้ข้อสรุปว่า g มีผกผัน จงหาผกผันของ g
5. กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต B แล้วจงแสดงว่า $(f^{-1})^{-1} = f$

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

2.4.2 ผกผันของฟังก์ชันประกอบ

ในหัวข้อ 2.3 เราได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันประกอบมาแล้ว เราทราบว่าถ้า $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ แล้ว $gof: A \rightarrow C$ สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาผกผันของฟังก์ชันประกอบกัน

จากที่เราเคยสรุปว่า $gof: A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต C โดยมีเงื่อนไขว่า $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3 เราสามารถสรุปได้ทันทีว่า gof มีผกผันแน่นอน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4
กำหนดให้ $gof: A \rightarrow C$ โดยที่ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ ต่างก็มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว $(gof)^{-1}: C \rightarrow A$ ก็ต่อเมื่อ gof มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต C

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) จะแสดงว่า ถ้า $(gof)^{-1}: C \rightarrow A$ แล้ว gof มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต C เสมอ

1) จะแสดงว่า $(gof)^{-1}$ มีสมบัติทั่วถึงบนเซต C

ให้ $x \in C$ จะได้ว่ามี $y \in A$ ที่ซึ่ง $(x, y) \in (gof)^{-1}$

ดังนั้น $(y, x) \in gof$

จะได้ว่า มี $z \in B$ ที่ซึ่ง $(z, x) \in g$ และ $(y, z) \in f$

นั่นคือ $z = f(y)$ และ $x = g(z)$ ดังนั้น $(gof)^{-1}$ มีสมบัติทั่วถึงบนเซต C

2) จะแสดงว่า $(gof)^{-1}$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งบนเซต C

ให้ $x_1, x_2 \in C$ จะได้ว่ามี $y \in A$ ที่ซึ่ง $(x_1, y) \in (gof)^{-1}$ และ $(x_2, y) \in (gof)^{-1}$

จะได้ว่า $y = (gof)^{-1}(x_1)$ และ $y = (gof)^{-1}(x_2)$

$(gof)^{-1}(x_1) = (gof)^{-1}(x_2)$

$g(f^{-1}(x_1)) = g(f^{-1}(x_2))$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

และเนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย จึงได้ว่า $x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น $(gof)^{-1}$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งบนเซต C ตามต้องการ

($\Leftarrow$) จะแสดงว่า ถ้า gof มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต C แล้ว $(gof)^{-1} : C \rightarrow A$

เนื่องจาก gof มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงบนเซต C โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$(gof)^{-1} : C \rightarrow A$ ❑

จะเห็นได้ว่า gof จะมีผกผันได้หรือไม่นั้น gof จะต้องมีสมบัติ 2 ประการ คือ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันทั่วถึงบนเซต C ก่อนที่กล่าวถึงสมบัติอื่นๆ ที่น่าสนใจเกี่ยวกับผกผันของฟังก์ชันประกอบ จะขอให้ความหมายของบางคำเสียก่อนดังนี้

บทนิยาม 2.6

กำหนดให้ $A \subseteq R$ แล้ว ***ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function)*** คือ ฟังก์ชันจาก A ไปยัง A หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์คือ $I_A : A \rightarrow A$

จากบทนิยาม 2.6 จะเห็นได้ว่า $I_A(x) = x$ สำหรับทุกๆ $x \in A$ นั่นเอง ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับผกผันของฟังก์ชันประกอบ

ทฤษฎีบท 2.5

กำหนดให้ $f: A \longrightarrow B$ และ $g: B \longrightarrow C$ โดยที่ f และ g ต่างก็มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1) $f^{-1}of$ จะเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต A และ fof^{-1} จะเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต B

2) $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ และ $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

พิสูจน์ ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 2) ส่วนข้อ 1) ขอให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เองเป็นแบบฝึกหัด

2.1) ($\subseteq$) จะแสดงว่า $(gof)^{-1} \subseteq f^{-1}og^{-1}$

ให้ $(x, y) \in (gof)^{-1}$ จะได้ว่า $(y, x) \in gof$

ดังนั้น $x = gof(y) = g(f(y))$

$g^{-1}(x) = f(y)$

$f^{-1}(g^{-1}(x)) = y$

นั่นคือ $(f^{-1}og^{-1})(x) = y \Rightarrow (x, y) \in f^{-1}og^{-1}$

เพราะฉะนั้น $(gof)^{-1} \subseteq f^{-1}og^{-1}$ ตามต้องการ

($\supseteq$) จะแสดงว่า $f^{-1}og^{-1} \subseteq (gof)^{-1}$

ให้ $(x, y) \in f^{-1}og^{-1}$ จะได้ว่า $y = f^{-1}og^{-1}(x)$

$f(y) = g^{-1}(x)$

$g(f(y)) = x$

ดังนั้น $(y, x) \in gof$ นั่นคือ $(x, y) \in (gof)^{-1}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}og^{-1} \subseteq (gof)^{-1}$

สรุปได้ว่า $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

2.2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 2.1) ❑

แบบฝึกหัด 2.4 ข

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 2.5 ข้อ 1) เป็นจริง

2.5 พีชคณิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.7

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยังสับเซตของ R และ $x \in D_f \cap D_g$ แล้ว

1) $f + g = \{(x, y) \mid y = f(x) + g(x)\}$

2) $f - g = \{(x, y) \mid y = f(x) - g(x)\}$

3) $f \cdot g = \{(x, y) \mid y = f(x) \cdot g(x)\}$

4) $\dfrac{f}{g} = \{(x, y) \mid y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ และ $g(x) \neq 0\}$

ตัวอย่างที่ 2.11 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ สำหรับทุกๆ $x > 0$ และ $g(x) = x^2 + 3$ สำหรับทุกๆ $x \in R$ จงแสดงว่า

$h(x) = f(x) + g(x)$ สำหรับทุก $x > 0$

วิธีทำ เนื่องจาก h(x) เป็นการบวกกันของฟังก์ชันโดยมีเงื่อนไขว่า $D_h = D_f \cap D_g$

และจากที่โจทย์กำหนดว่า $D_f = (0, \infty)$ และ $D_g = (-\infty, \infty)$ จะได้ว่า

$D_h = (0, \infty) \cap (-\infty, \infty) = (0, \infty)$

ดังนั้น $h(x) = f(x) + g(x)$ ภายใต้โดเมนที่ได้ตามต้องการ ❑

ตัวอย่างที่ 2.12 นิยามฟังก์ชัน $h = f \cdot g = \{(x, y) \mid y = f(x) \cdot g(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 1\}$

ถ้า $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ และ $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ จงหาค่าของ g(5)

วิธีทำ จาก $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ จะได้ว่า $g(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$

จะได้ว่า $g(5) = \dfrac{h(5)}{f(5)}$

เนื่องจาก $h(5) = \dfrac{1}{5^2 - 1} = \dfrac{1}{24}$ และ $f(5) = \dfrac{5}{\sqrt{5^2 - 1}} = \dfrac{5}{\sqrt{24}}$

เพราะฉะนั้น $g(5) = \dfrac{h(5)}{f(5)} = \dfrac{\frac{1}{24}}{\frac{5}{\sqrt{24}}} = \dfrac{1}{24} \cdot \dfrac{\sqrt{24}}{5} = \dfrac{\sqrt{24}}{120}$ ❑

บทที่ 3
อัตราส่วนตรีโกณมิติ และฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

3.1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

บทนิยาม 3.1

กำหนดให้ θ เป็นมุมใดๆ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่ไม่ใช่มุมฉาก

1) ***อัตราส่วนไซน์ (sine : sin)*** หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความยาวด้านตรงข้ามมุม θ กับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก เขียนเป็นสมการคือ $\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

2) ***อัตราส่วนโคไซน์ (cosine : cos)*** หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความยาวด้านประชิดมุม θ กับความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก เขียนเป็นสมการคือ $\cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

3) ***อัตราส่วนแทนเจนต์ (tangent : tan)*** หมายถึง อัตราส่วนระหว่างอัตราส่วนไซน์กับอัตราส่วนโคไซน์ เขียนเป็นสมการคือ $\tan\theta = \dfrac{\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}}{\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

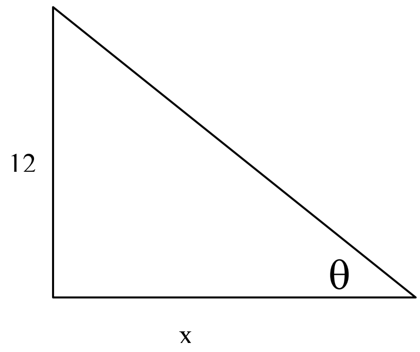
การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิตินั้น เพื่อความสะดวกจะใช้ตารางค่าตรีโกณมิติซึ่งได้มีผู้จัดทำไว้แล้ว แต่อย่างไรก็ตาม มีอัตราส่วนตรีโกณมิติบางค่าที่ผู้อ่านควรจะจดจำให้ได้เป็นอย่างดี ดังตารางต่อไปนี้

มุม θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

ตาราง 3.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติสำหรับมุมบางค่า

จากตาราง จะเห็นได้ว่ามีอัตราส่วนตรีโกณมิติบางค่าเท่ากัน 2 คู่ได้แก่ $\sin 45^\circ$ กับ $\cos 45^\circ$ และ $\sin 30^\circ$ กับ $\cos 60^\circ$ โดยในกรณีทั่วๆ ไปเราสามารถสรุปได้ว่าสำหรับมุม θ ใดๆ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ และ $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และมุม $\theta = 30^{\circ}$ ดังนี้ จงหาความยาว x



วิธีทำ จากรูป จะเห็นว่า $\tan 30^{\circ} = \frac{12}{x}$

แต่ $\tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ จะได้ว่า $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12}{x}$

เพราะฉะนั้น $x = 12\sqrt{3}$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $\cos 15^{\circ} = 0.9659$ จงหาค่าของ $\sin 75^{\circ}$

วิธีทำ จากสมการ $\sin\theta = \cos(90^{\circ} - \theta)$

จะได้ว่า $\sin 75^{\circ} = \cos(90^{\circ} - 75^{\circ}) = \cos 15^{\circ} = 0.9659$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.3 สำหรับมุม θ ใดๆ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงแสดงว่า $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

วิธีทำ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ

$$
\begin{aligned}
\text{จาก } \cos^2\theta + \sin^2\theta &= \left(\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}\right)^2 \\
&= \frac{\text{ชิด}^2}{\text{ฉาก}^2} + \frac{\text{ข้าม}^2}{\text{ฉาก}^2} \\
&= \frac{\text{ชิด}^2 + \text{ข้าม}^2}{\text{ฉาก}^2} \\
&= \frac{\text{ฉาก}^2}{\text{ฉาก}^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

❑

3.1.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติผกผัน (inverse trigonometric ratio)

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราได้พิจารณาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติมาแล้ว สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติผกผันดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.2

กำหนดให้ θ เป็นมุมใดๆ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่ไม่ใช่มุมฉาก

1) ***อัตราส่วนโคเซแคนต์ (cosecant : cosec)*** หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากกับความยาวด้านตรงข้ามมุม θ เขียนเป็นสมการคือ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{1}{\sin\theta}$

2) ***อัตราส่วนเซแคนต์ (secant : sec)*** หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากกับความยาวด้านประชิดมุม θ เขียนเป็นสมการคือ $\sec\theta = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{1}{\cos\theta}$

3) ***อัตราส่วนโคแทนเจนต์ (cotangent : cot)*** หมายถึง อัตราส่วนระหว่างอัตราส่วนโคไซน์กับอัตราส่วนไซน์ เขียนเป็นสมการคือ $\cot\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{1}{\tan\theta}$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงแสดงว่า สำหรับมุม θ ใดๆ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$

วิธีทำ จาก $\tan(90^\circ - \theta)$

$$
\begin{aligned}
\tan(90^\circ - \theta) &= \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)} \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \cot\theta
\end{aligned}
$$

❑

แบบฝึกหัด 3.1

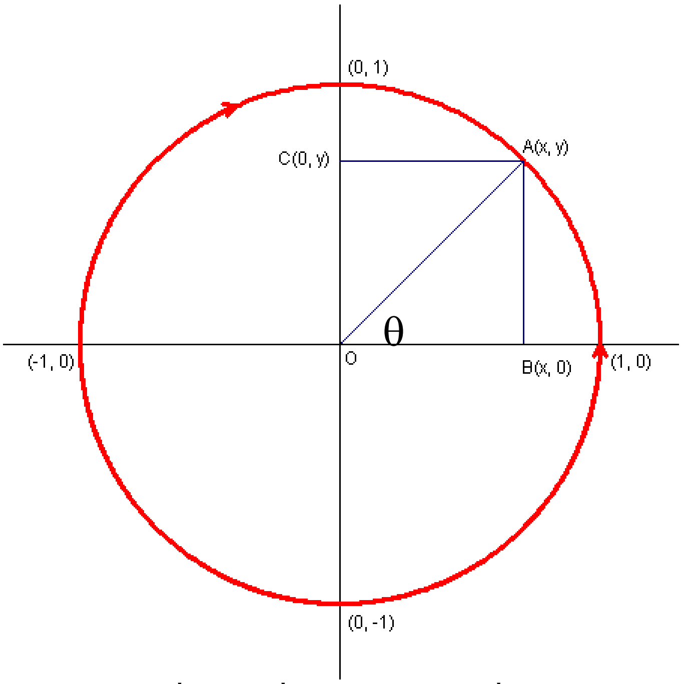
1. กำหนดให้ $\cos 25^\circ = 0.906$ จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติและอัตราส่วนตรีโกณมิติผกผันต่อไปนี้
   1) $\sin 25^\circ$
   2) $\cos 65^\circ$
   3) $\cos 65^\circ + \sec 65^\circ$
   4) $\sec^2 65^\circ - \tan^2 65^\circ$
2. จงหาค่าของ $(\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 89^\circ) + (\cos^2 89^\circ + \cos^2 88^\circ + \ldots + \cos^2 1^\circ)$

3.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)

3.2.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

บทนิยาม 3.3
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูป $y = f(x)$ โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่นิยามบนวงกลมหนึ่งหน่วย และ $-\pi \leq x \leq \pi$

พิจารณารูปวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้



รูป 3.1 วงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด O(0, 0)

ลากส่วนของเส้นตรง OA โดยมีจุด A(x, y) เป็นจุดปลายซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยดังกล่าวโดยที่ OA ทำมุม θ กับแกน X ที่จุด A ลากเส้นตั้งฉากกับแกน X โดยตัดแกน X ที่จุด B จะเห็นว่าเราได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAB

<u>พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAB</u>

จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\cos\theta = \frac{OB}{OA}$ และ $\sin\theta = \frac{AB}{OA}$

แต่ OA = 1 เนื่องจากเป็นความยาวของรัศมี นั่นคือ $\cos\theta = OB$ และ $\sin\theta = AB$ และจากเรขาคณิตวิเคราะห์เราได้ว่า $OB = \sqrt{(0-x)^2+(0-0)^2} = x$ และ $AB = \sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2} = y$

เพราะฉะนั้น เราจึงได้พิกัดของจุด A(x, y) ในเทอมของ θ คือ A($\cos\theta, \sin\theta$) นั่นเอง ต่อไปเราจะมาหาค่าของ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$ ของพิกัด (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1)

1) พิจารณาจุด (1, 0) จะเห็นว่า OA กวาดไปบนวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นมุมเท่ากับ 0 เราจึงได้ว่า $\cos 0 = 1$ และ $\sin 0 = 1$

2) พิจารณาจุด (–1, 0) จะเห็นว่า OA กวาดไปบนวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นมุม 180° หรือเท่ากับ π เรเดียน จึงได้ว่า $\cos\pi = -1$ และ $\sin\pi = 0$

3) พิจารณาจุด (0, 1) จะเห็นว่า OA กวาดไปบนวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นมุม 90° หรือเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน จึงได้ว่า $\cos\frac{\pi}{2} = -1$ และ $\sin\pi = 0$

4) พิจารณาจุด (0, –1) จะเห็นว่า OA กวาดไปบนวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นมุม 270° หรือเท่ากับ $\frac{3\pi}{2}$ เรเดียน จึงได้ว่า $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ และ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

ค่าของไซน์และโคไซน์เหล่านี้มีความสำคัญและจำเป็นมาก เนื่องจากต้องนำไปใช้ในการคำนวณและใช้ในหลายสาขาวิชาจึงควรจดจำให้ได้อย่างแม่นยำ

สำหรับกรณีที่ OA กวาดไปบนวงกลมมากกว่า 1 รอบ เราก็สามารถคำนวณหาค่าฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้เช่นเดียวกัน โดยมีสมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$\cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ สำหรับ $n \geq 0$

$\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ สำหรับ $n \geq 0$

$\cos n\pi = -1$ สำหรับจำนวนคี่ n ใดๆ

$\sin n\pi = 0$ สำหรับจำนวนคี่ n ใดๆ

$\cos n\pi = 1$ สำหรับจำนวนคู่ n ใดๆ

$\sin n\pi = 0$ สำหรับจำนวนคู่ n ใดๆ

และเนื่องจากเราได้นิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยได้แล้ว เราจึงสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของความยาวของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาค่าฟังก์ชันไซน์ของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งยาว 15.70 เซ็นติเมตร (กำหนดให้ $\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ จาก $\sin(15.70) = \sin(3.14 \times 5)$

$= \sin 5\pi$

$= 0$

และ $\cos(15.70) = \cos(3.14 \times 5)$

$= \cos 5\pi = -1$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาค่าไซน์และโคไซน์ของส่วนโค้งยาว 31.4 เซ็นติเมตร เมื่อวัดตามเข็มนาฬิกา และจงหาว่าส่วนโค้งที่มีความยาวดังกล่าวจะต้องวัดรอบวงกลมหนึ่งหน่วยกี่รอบ

วิธีทำ ก่อนอื่นให้หาจำนวนรอบของส่วนโค้งนี้ก่อน

จาก ความยาวรอบวงกลม k รอบ = $2k\pi r$

แต่ r = 1 และความยาวรอบรูปวงกลม k รอบเท่ากับ 31.4 เซ็นติเมตร แทนค่าได้

$$31.4 = 2 \times k \times \pi$$

$$k = \frac{31.4}{2 \times 3.14} = 5$$

แสดงว่า วงกลมหมุนไป 5 รอบ

ดังนั้น จะได้ว่า
$$\begin{aligned} \cos 31.4 &= \cos (5 \times 6.28) \\ &= \cos (5 \times 2\pi) \\ &= \cos 10\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน
$$\begin{aligned} \sin 31.4 &= \sin (5 \times 6.28) \\ &= \sin (5 \times 2\pi) \\ &= \sin 10\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

❑

แบบฝึกหัด 3.2 ก

1. สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ จงแสดงว่า $\cos(-\theta) = \cos\theta$ และ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
2. ในรูปวงกลมหนึ่งหน่วย และมุม θ ใดๆ จงแสดงว่า $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
3. จงหาพิกัดของจุดบนส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งยาว 10 หน่วย

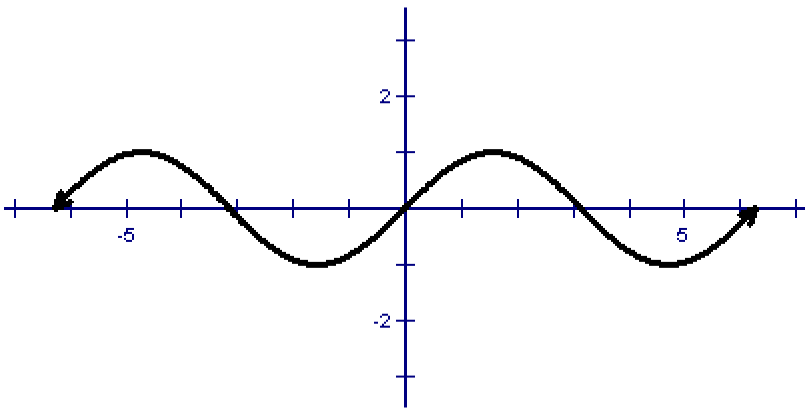
3.2.2 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในบทที่ 2 เราได้พิจารณาเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันโดยทั่วๆ ไปมาแล้ว สำหรับหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

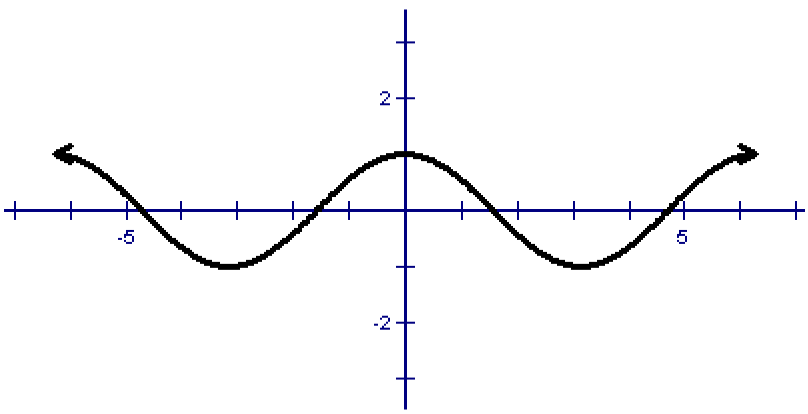
ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
y = sin x	R	[–1, 1]
y = cos x	R	[–1, 1]
y = tan x	R – { $\frac{n\pi}{2}$ | n เป็นเลขคี่}	R
y = cosec x	R – {$n\pi$ | n เป็นจำนวนเต็ม}	R – (–1, 1)
y = sec x	R – { $\frac{n\pi}{2}$ | n เป็นเลขคี่}	R – (–1, 1)
y = cot x	R – {$n\pi$ | n เป็นจำนวนเต็ม}	R

3.2.3 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

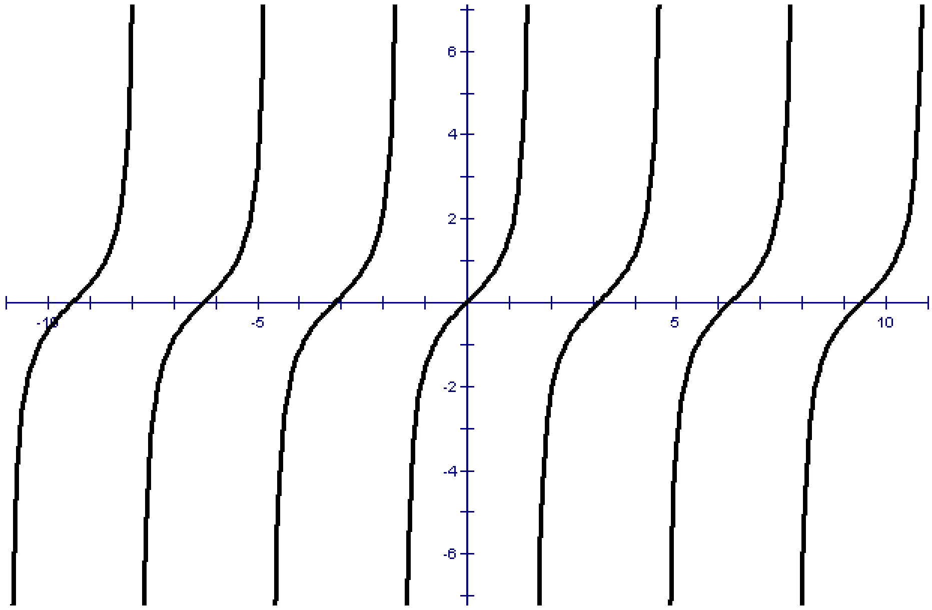
การศึกษาเรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะทำให้ผู้อ่านมีความเข้าใจเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ ตลอดจนการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันตรีโกณมิติในช่วงที่กำหนดให้ได้ ดังนี้



รูป 3.2 กราฟของ y = sin x ในช่วง [–2π, 2π]



รูป 3.3 กราฟของ y = cos x ในช่วง [–2π, 2π]



รูป 3.4 กราฟของ $y = \tan x$ ในช่วง $(-\infty, \infty)$

แบบฝึกหัด 3.2 ข

1. กำหนดให้ $y = \cos x + \sin x$ สำหรับทุก $x \in [0, \pi]$ จงหาโดเมนและเรนจ์ พร้อมทั้งหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด และวาดกราฟพอสังเขปของฟังก์ชันที่กำหนดให้ด้วย
2. กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งสำหรับทุก $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

3.3 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

บทนิยาม 3.3
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities) คือ สมการทางพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกๆ ค่าของจำนวนจริง

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่น่าสนใจและสามารถในการนำไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์บางสาขา สรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1
กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2) $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
3) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
4) $\cos(-\theta) = \cos\theta$
5) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

พิสูจน์ ในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 2), 3)

2) จาก $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

แทนค่า $\mathrm{cosec}^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ และ $\cot^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ จะได้ว่า

$$\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= 1$$ ❑

3) จาก $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

แทนค่า $\sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ และ $\tan^2\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ จะได้ว่า

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= 1$$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาค่าของ $\cos^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{6}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{6}$

ก. 2 ข. 3

ค. $\frac{11}{4}$ ง. $\frac{3}{2}$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

วิธีทำ จากโจทย์ $\cos^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{6}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{6}$ จัดกลุ่มใหม่ได้คือ

$(\cos^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12})+(\sin^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{7\pi}{6})$

$= 1+(\sin^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{7\pi}{6})$

$= 1+[\sin^2(\pi-\frac{\pi}{6})+\cos^2(\pi+\frac{\pi}{6})]$

$= 1+(\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6})$

$= 1+1$

$= 2$ ❑

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงแสดงว่าเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นจริง
   1) $\cos^2\theta\cot\theta+\sin^2\theta\tan\theta+2\sin\theta\cos\theta = \tan\theta+\cot\theta$
   2) $\tan^2\theta-\sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$
   3) $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cot^2\theta$
2. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 3.1 ข้อ 4) และข้อ 5) เป็นจริง

3.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมประกอบ

ทฤษฎีบท 3.2
กำหนดให้ A, B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ไม่เป็นมุมฉาก แล้วจะได้ว่า

1) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

2) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

3) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

<u>**หมายเหตุ**</u> ทฤษฎีบท 3.2 ผู้เขียนกล่าวถึงเฉพาะฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกเท่านั้น สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลต่างก็แทนที่เครื่องหมายบวกด้วยเครื่องหมายลบ และเราจะนำทฤษฎีบทดังกล่าวไปใช้โดยไม่มีการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3.8 กำหนดให้ A, B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $A + B = \frac{\pi}{2}$ จงแสดงว่า

1) $\sin(A+B) = 1$

2) $\cos(A+B) = 0$

วิธีทำ 1) จาก $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ และ $A + B = \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin A \cos(\tfrac{\pi}{2} - A) + \cos A \sin(\tfrac{\pi}{2} - A)\\ &= \sin A \sin A + \cos A \cos A\\ &= \sin^2 A + \cos^2 A\\ &= 1\end{aligned}$$

❑

2) จาก $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ และ $A + B = \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A \cos(\tfrac{\pi}{2} - A) - \sin A \sin(\tfrac{\pi}{2} - A)\\ &= \cos A \sin A - \sin A \cos A = 0\end{aligned}$$

❑

ตัวอย่างที่ 3.9 กำหนดให้ A, B, C เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงแสดงว่า

1) $\sin(A+B) = \sin C$

2) $\cos(A+B) = -\cos C$

วิธีทำ เนื่องจาก A, B, C เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $A + B + C = \pi$

1) $A + B = \pi - C$

$\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$

2) $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$

❑

ทฤษฎีบท 3.3

กำหนดให้ A เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

3) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

ทฤษฎีบท 3.3 สามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายดายโดยการแทนค่า B = A ในทฤษฎีบท 3.2 ดังนั้น ผู้เขียนจะไม่แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้

ตัวอย่างที่ 3.10 จากทฤษฎีบท 3.3 จงเขียน cos 2A ในรูปของ cos A อย่างเดียวหรือ sin A อย่างเดียว ตามลำดับ

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) \\ &= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

❑

ตัวอย่างที่ 3.11 จากทฤษฎีบท 3.3 จงเขียน tan 2A ในรูปของ sin A และ cos A

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\tan 2A &= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} \\ &= \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A - 1}\end{aligned}$$

หรือ $\tan 2A = \dfrac{2\sin A \cos A}{1 - 2\cos^2 A}$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.12 ถ้า $\dfrac{\sin^2 3A}{\sin^2 A} - \dfrac{\cos^2 3A}{\cos^2 A} = 2$ แล้ว cos 2A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent' มี.ค. 2548)

วิธีทำ จากโจทย์ $\dfrac{\sin^2 3A}{\sin^2 A} - \dfrac{\cos^2 3A}{\cos^2 A}$ จัดรูปใหม่ได้

$$\left(\frac{\sin 3A}{\sin A}\right)^2 - \left(\frac{\cos 3A}{\cos A}\right)^2 = 2$$

$$\left(\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A}\right)\cdot\left(\frac{\sin 3A}{\sin A} + \frac{\cos 3A}{\cos A}\right) = 2$$

$$\left(\frac{\sin 3A \cos A - \cos 3A \sin A}{\sin A \cos A}\right)\cdot\left(\frac{\sin 3A \cos A + \cos 3A \sin A}{\sin A \cos A}\right) = 2$$

$$\left(\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}\right)\cdot\left(\frac{\sin(3A+A)}{\sin A\cos A}\right) = 2$$

$$\left(\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}\right)\cdot\left(\frac{\sin 4A}{\sin A\cos A}\right) = 2$$

$$\left(\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}\right)\cdot\left(\frac{\sin 2(2A)}{\sin A\cos A}\right) = 2$$

$$\left(\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}\right)\cdot\left(\frac{2\sin 2A\cos 2A}{\sin A\cos A}\right) = 2$$

$$\left(\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}\right)\cdot\left(\frac{4\sin A\cos A\cos 2A}{\sin A\cos A}\right) = 2$$

$$2\cdot 4\cos 2A = 2$$

เพราะฉะนั้น $\cos 2A = \frac{1}{4}$ ❑

สำหรับทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นการแปลงผลบวกหรือผลต่างของมุมประกอบไปเป็นผลคูณของมุมประกอบ

ทฤษฎีบท 3.4 การแปลงผลบวกหรือผลต่างเป็นคูณ

1) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

3) $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

4) $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

พิสูจน์ ในที่นี้ ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 2) และข้อ 3) ให้ดู สำหรับข้ออื่นๆ ก็ใช้แนวการพิสูจน์คล้ายๆ กัน จึงละไว้ให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

2) จาก $2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

เพื่อความสะดวก เราสมมติให้ $A = \frac{x}{2}$ และ $B = \frac{y}{2}$ ดังนั้น นิพจน์ข้างต้นเขียนใหม่ได้ว่า

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B)$

$= 2(\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$

$= 2(\sin A\cos B\cdot\cos A\cos B + \cos A\sin B\cdot\cos A\cos B$

$+ \sin A\cos B\cdot\sin A\sin B + \cos A\sin B\cdot\sin A\sin B)$

$= 2(\sin A\cos A\cos^2 B + \cos^2 A\sin B\cos B + \sin^2 A\cos B\sin B + \cos A\sin A\sin^2 B)$

$= 2[\sin A\cos A(\cos^2 B + \sin^2 B) + \sin B\cos B(\cos^2 A + \sin^2 A)]$

$= 2(\sin A\cos A + \sin B\cos B)$ (เนื่องจาก $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ และ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$)

$= 2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B$

$= \sin 2A + \sin 2B$

แทนค่า $A = \frac{x}{2}$ และ $B = \frac{y}{2}$

ในที่สุดจะได้ว่า $2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin x + \sin y$ ❑

3) จาก $-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

เพื่อความสะดวก เราสมมติให้ $A = \frac{x}{2}$ และ $B = \frac{y}{2}$ ดังนั้น นิพจน์ข้างต้นเขียนใหม่ได้ว่า

$= -2\sin(A+B)\sin(A-B)$

$= -2(\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$

$= -2[(\sin A\cos B)^2 - (\cos A\sin B)^2]$

$= -2\sin^2 A\cos^2 B + 2\cos^2 A\sin^2 B$

$= -2\sin^2 A\cos^2 B + 2(1-\sin^2 A)(1-\cos^2 B)$

$= -2\sin^2 A\cos^2 B + 2(1-\sin^2 A-\cos^2 B+\sin^2 A\cos^2 B)$

$= -2\sin^2 A\cos^2 B + 2(1-\sin^2 A) - 2\cos^2 B + 2\sin^2 A\cos^2 B$

$= 2(1-\sin^2 A) - 2\cos^2 B$

$= 2\cos^2 A - 2\cos^2 B$

$= (2\cos^2 A - 1) - (2\cos^2 B - 1)$

$= \cos 2A - \cos 2B$

แทนค่า $A = \frac{x}{2}$ และ $B = \frac{y}{2}$

ในที่สุดจะได้ว่า $-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos x - \cos y$ ตามต้องการ ❑

เราจะปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยทฤษฎีบทเกี่ยวกับการแปลงผลคูณของมุมประกอบ ไปเป็นผลบวกหรือผลต่างของมุมประกอบ

ทฤษฎีบท 3.5 การแปลงผลคูณเป็นผลบวกหรือผลต่าง

1) $\cos x\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$

2) $\sin x\sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

3) $\sin x\cos y = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$

พิสูจน์ 1) จากสูตร $\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$

$= \frac{(\cos x\cos y - \sin x\sin y) + (\cos x\cos y + \sin x\sin y)}{2}$

$= \frac{2\cos x\cos y}{2} = \cos x\cos y$ ❑

2) จากสูตร $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

$= \frac{(\cos x\cos y + \sin x\sin y) - (\cos x\cos y - \sin x\sin y)}{2}$

$= \frac{2\sin x\sin y}{2} = \sin x\sin y$ ❑

แบบฝึกหัด 3.4

1. กำหนดให้ A เป็นมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   1) $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

   2) $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

2. จงใช้ผลจากข้อ 1 หาค่าของ $\tan\frac{A}{2}$
3. จงพิสูจน์ว่าทฤษฎีบท 3.3 เป็นจริง
4. จงพิสูจน์ว่าทฤษฎีบท 3.4 ข้อที่ยังไม่ได้พิสูจน์ เป็นจริง
5. จงพิสูจน์ว่าทฤษฎีบท 3.5 ข้อที่ยังไม่ได้พิสูจน์ เป็นจริง

3.5 กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์

3.5.1 กฎของโคไซน์

กฎของโคไซน์ (Laws of Cosine) เป็นกฎที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ กับมุมที่กำหนดให้ซึ่งเป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมนั้นอย่างน้อย 1 มุม ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4

กำหนดให้ A, B, C เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยมใดๆ และให้ a, b, c เป็นความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

ในเบื้องต้นนี้ เราจะนำทฤษฎีบท 3.4 ไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงก่อน สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เราจะกล่าวถึงอีกครั้งในหนังสือเรียนออนไลน์เล่มที่ 9 เรื่องเวกเตอร์

จะเห็นได้ว่า กฎของโคไซน์จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ ทราบความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมอย่างน้อยสองด้าน พร้อมทั้งมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่ต้องการหาความยาว

จากทฤษฎีบท 3.4 ถ้าเราเขียนสมการ (2) เสียใหม่โดยที่ $-a^2 = c^2 - b^2 - 2ac\cos B$ แล้วนำไปบวกกับสมการ (1) ก็จะได้ว่า $0 = (b^2 + c^2 - 2bc\cos A) + (c^2 - b^2 - 2ac\cos B) = 2c^2 - 2bc\cos A - 2ac\cos B$

ดังนั้น $2c^2 = 2bc\cos A + 2ac\cos B = 2c(b\cos A + a\cos B)$

นั่นคือ $c = b\cos A + a\cos B$ และดำเนินการในทำนองเดียวกันนี้กับสมการคู่อื่นๆ เราสามารถสรุปได้ว่า $a = b\cos C + c\cos B$ และ $b = c\cos A + a\cos C$

บทแทรก 3.1
กำหนดให้ A, B, C เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม และให้ a, b, c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ จะได้ว่า

1) $a = b\cos C + c\cos B$
2) $b = a\cos C + c\cos A$
3) $c = a\cos B + b\cos A$

จะเห็นได้ว่า บทแทรก 3.1 จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ เราต้องทราบความยาวด้านถึงสองด้านรวมทั้งมุมอีกถึงสองมุมด้วยกัน จึงไม่สะดวกนัก แต่ก็นับว่าสะดวกเมื่อเทียบกับกฎของโคไซน์เนื่องจากว่าไม่มีพจน์ที่เป็นกำลังสองให้คำนวณยุ่งยากแต่อย่างใด

แบบฝึกหัด 3.5 ก

1. จงแสดงว่าบทแทรก 3.1 ข้อ 1) และข้อ 2) เป็นจริง

3.5.2 กฎของไซน์

กฎของไซน์ (Laws of Sine) เป็นกฎที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมกับค่าไซน์ของมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านนั้นๆ สรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5
กำหนดให้ A, B, C เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม และให้ a, b, c เป็นความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ จะได้ว่า $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

อนึ่ง ทฤษฎีบท 3.5 เราจะนำไปใช้งานโดยไม่พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3.13 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AC เป็นฐาน และให้ a, b, c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ โดยกฎของไซน์ทำให้ทราบว่า $\frac{\sin B}{b} = 3$ และ $c\cos A + a\cos C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ จงหาค่าของ $|\cos(A+C)|$

วิธีทำ เนื่องจาก $A + B + C = \pi \Rightarrow A + C = \pi - B$

ดังนั้น $|\cos(A+C)| = |\cos(\pi - B)| = |-\cos B| = \cos B$

แต่โจทย์กำหนดให้ $c\cos A + a\cos C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ จากบทแทรก 3.1 ข้อ 2) จึงได้ว่า $b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

และจาก $\frac{\sin B}{b} = 3 \Rightarrow \sin B = 3b = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

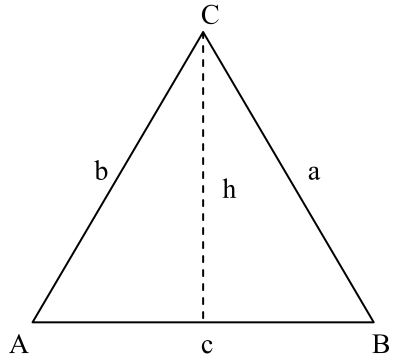
เพราะฉะนั้น $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ ❑

แบบฝึกหัด 3.5 ข

1. สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ จงแสดงว่า k ในทฤษฎีบท 3.5 คือ ส่วนกลับของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่มีรูปสามเหลี่ยม ABC แนบอยู่ด้านใน

3.6 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC ดังต่อไปนี้



รูป 3.5 รูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีส่วนสูง h หน่วย และมีฐานยาว c หน่วย

จากรูปสามเหลี่ยม ABC ข้างต้น เราจะได้ว่า $\sin A = \frac{h}{b}$ และ $\sin B = \frac{h}{a}$ หรือเขียนใหม่ในรูปของ h คือ $h = b\sin A$ และ $h = a\sin B$ ตามลำดับ

จากสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม (A) = $\frac{1}{2}$ × ส่วนสูง × ความยาวฐาน = $\frac{1}{2}hc$ เมื่อเราแทนค่า h ต่างๆ ที่ได้พิจารณามาแล้วข้างต้น ก็จะได้ว่า $A = \frac{1}{2}bc\sin A$ หรือ $A = \frac{1}{2}ac\sin B$ ตามลำดับ และจากกฎของไซน์ เราทราบว่า $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ ก็จะได้ว่า $c\sin A = a\sin C$ เพราะฉะนั้น เราจึงสามารถหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ได้อีกสูตรหนึ่งคือ $A = \frac{1}{2}ab\sin C$

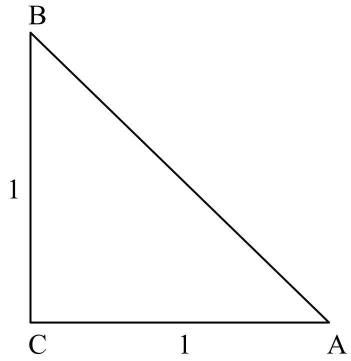
ตัวอย่างที่ 3.14 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าทราบว่า $a = 2$, $b = 4$ และมุม C มีขนาดเท่ากับ $\frac{\pi}{6}$ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังกล่าว

วิธีทำ จากสูตร $A = \frac{1}{2}ab\sin C$

แทนค่า $a = 2$, $b = 4$ และ $C = \frac{\pi}{6}$ ลงในสูตรข้างต้น จะได้ว่า

$A = \frac{1}{2}(2)(4)\sin\frac{\pi}{6} = (4)(\frac{1}{2}) = 2$ ตารางหน่วย ❑

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป ถ้ากำหนดให้มุม C เป็นมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย



วิธีทำ จากสูตร $A = \frac{1}{2}ab \sin C$

แทนค่า $a = 1,\ b = 1,\ C = \frac{\pi}{2}$ ในสูตรข้างต้นจะได้ว่า

$A = \frac{1}{2}(1)(1)\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ ตารางหน่วย ❑

แบบฝึกหัด 3.6

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาวด้านละ a หน่วย จงแสดงว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

3.7 ผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น ผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่ใช่ฟังก์ชัน แต่เป็นเพียงความสัมพันธ์ธรรมดาเท่านั้น ต่อไปนี้เป็นตารางสรุปผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติแต่ละฟังก์ชัน

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	ผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$y = \tan x$	$y = \arctan x$
$y = \operatorname{cosec} x$	$y = \operatorname{arccosec} x$
$y = \sec x$	$y = \operatorname{arcsec} x$
$y = \cot x$	$y = \operatorname{arccot} x$

สำหรับโดเมนและเรนจ์ของผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ก็ใช้คุณสมบัติเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กล่าวว่า $D_f = R_{f^{-1}}$ และ $R_f = D_{f^{-1}}$ อย่างไรก็ตาม ถ้าเรากำหนดโดเมนที่เหมาะสมแล้วพบว่าผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างปัญหาเกี่ยวกับผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 3.16 ถ้า $\arctan x = \arctan\frac{1}{4} - 2\arctan\frac{1}{2}$ แล้ว $\sin(180^\circ + \arctan x)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ให้ $A = \arctan\frac{1}{4} \Rightarrow \tan A = \frac{1}{4}$

และให้ $B = \arctan\frac{1}{2} \Rightarrow \tan B = \frac{1}{2}$

จาก $\arctan x = \arctan\frac{1}{4} - 2\arctan\frac{1}{2}$

จะได้ $x = \tan(\arctan\frac{1}{4} - 2\arctan\frac{1}{2})$

$= \tan(A - 2B)$

$= \dfrac{\tan A - \tan 2B}{1 + \tan A \tan 2B}$

จาก $\tan 2B = \dfrac{2\tan B}{1 - \tan^2 B} = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

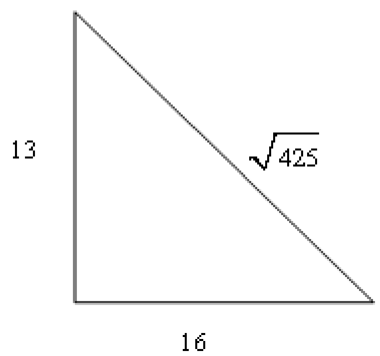
$= \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}}$

$= \dfrac{4}{3}$

ดังนั้น $x = \dfrac{\tan A - \tan 2B}{1 + \tan A \tan 2B}$

$= \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}$

$= \dfrac{\frac{3 - 16}{12}}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{13}{16}$



เพราะฉะนั้น $\sin(180^\circ + \arctan x) = -\sin(\arctan x)$

$= -\sin(\arctan(-\frac{13}{16}))$

$= \sin(\arctan\frac{13}{16})$

$= \sin(\arcsin\frac{13}{\sqrt{425}})$

$= \frac{13}{\sqrt{425}}$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.17 ถ้า $\tan(\arccos x) = -\sqrt{3}$ แล้วค่าของ $x \cdot \sin(2\arccos x)$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ => ให้ $A = \arccos x$

ดังนั้น $\tan A = \tan(\arccos x) = -\sqrt{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{2\pi}{3}$

จะได้ว่า $A = \frac{2\pi}{3}$

=> จาก $A = \arccos x$ จะได้ว่า $\cos A = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = x$

เพราะฉะนั้น $x \cdot \sin(2\arccos x) = x \cdot \sin(2A)$

$= (-\frac{1}{2})\sin\frac{4\pi}{3}$

$= (-\frac{1}{2})\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.18 กำหนดให้ $2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1 - a^2}) = \frac{\pi}{3}$ จงพิจารณาว่า arcsin a มีค่าอยู่ในช่วงใด

1) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ 2) $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

3) $(0, \frac{\pi}{4})$ 4) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

วิธีทำ กำหนดให้ $A = \arcsin a$ จะได้ว่า $\sin A = a$

ดังนั้น $\cos A = \sqrt{1 - a^2}$

กำหนดให้ $B = \arcsin(2a\sqrt{1 - a^2})$

จะได้ว่า $\sin B = 2a\sqrt{1 - a^2} = 2\sin A\cos A = \sin 2A$

แสดงว่า $B = 2A$

พิจารณา $2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1 - a^2}) = \frac{\pi}{3}$

จะเห็นว่าเขียนได้เป็น $2A + B = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos(2A + B) = \cos\frac{\pi}{3}$

พิจารณาด้านซ้ายของสมการ จะเห็นว่า

$\cos(2A + B) = \cos 2A \cos B - \sin 2A \sin B = \cos^2 2A - \sin^2 2A = \cos 4A$

ดังนั้น $\cos 4A = \cos\frac{\pi}{3}$

นั่นคือ $A = \frac{\pi}{12} = \arcsin a$ จะเห็นว่า $\frac{\pi}{12} \in (0, \frac{\pi}{4})$ ตอบข้อ 3) ❑

ตัวอย่างที่ 3.19 ผลบวกคำตอบของสมการ $\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \arccos x$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ -----(1)

แทน (1) ลงทางขวาของสมการจะได้

$\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

ดังนั้น $2\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\sin(2\arcsin x + \arcsin(1 - x)) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ -----(2)

เพื่อความสะดวกกำหนดให้ $A = \arcsin x$ และ $B = \arcsin(1 - x)$

ดังนั้น $\sin(2A + B) = \sin\frac{\pi}{2}$

พิจารณาทางด้านซ้ายของสมการ (2)

$$\begin{aligned}\sin(2A + B) &= \sin 2A \cos B + \cos 2A \sin B \\ &= (2\sin A \cos A)\cos B + (1 - 2\sin^2 A)\sin B \\ &= 2x(\sqrt{1 - x^2})(\sqrt{2x - x^2}) + (1 - 2x^2)(1 - x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $2x(\sqrt{1 - x^2})(\sqrt{2x - x^2}) + (1 - 2x^2)(1 - x) = 1$

$$2x\sqrt{(1 - x^2)(2x - x^2)} + (1 - 2x^2)(1 - x) = 1$$

$$2x\sqrt{2x - x^2 - 2x^3 + x^4} + (1 - x - 2x^2 + 2x^3) = 1$$

$$\sqrt{4x^2(2x - x^2 - 2x^3 + x^4)} = x + 2x^2 - 2x^3$$

$$\sqrt{8x^3 - 4x^4 - 8x^5 + 4x^6} = x + 2x^2 - 2x^3$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการได้

$$8x^3 - 4x^4 - 8x^5 + 4x^6 = x^2 + 4x^3 - 8x^5 + 4x^6$$

$$x^2 - 4x^3 + 4x^4 = 0$$

$$x^2(1 - 4x + 4x^2) = 0$$

$$x^2(1 - 2x)(1 - 2x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 0, \frac{1}{2}$ (รากซ้ำสอง)

นั่นคือ ผลบวกของคำตอบของสมการมีค่าเท่ากับ $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ❑

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงหาค่าของ $\sin(\arctan 2 + \arctan 3)$
2. กำหนดให้ $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin 2x + 2\arcsin x$ แล้วค่าของ $fog(\frac{1}{3})$ เท่ากับเท่าใด
3. ถ้า $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$ แล้ว $\arccos x - \arctan 2x$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
4. กำหนดให้ $A = \{x \mid \arccos(x - x^2) = \arcsin x + \arcsin(x - 1)\}$ จงหา $n(A)$

บทที่ 4
ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

4.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล

บทนิยาม 4.1

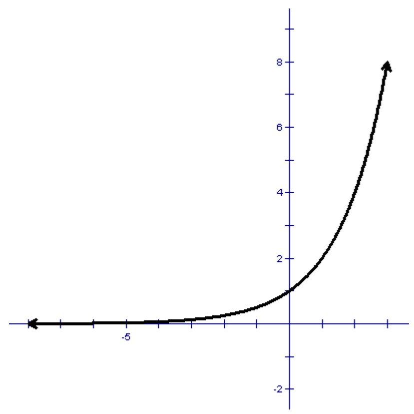
ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential Function) คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $y = a^x$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 1 เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\mathbf{f = \{(x, y) \mid y = a^x,\ a \in R^+ \text{ และ } a \neq 1\}}$$

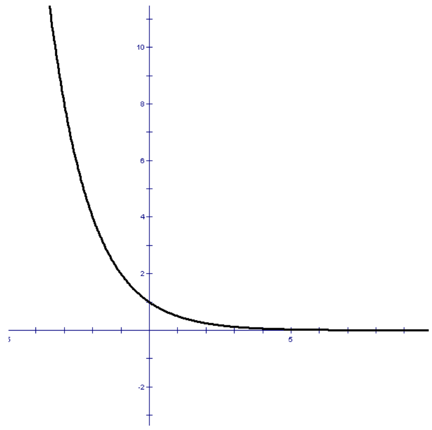
จากบทนิยาม 4.1 จะเห็นได้ว่า โดเมนของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลคือเซตของจำนวนจริง (R) และเรนจ์ของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลคือเซตของจำนวนจริงบวก (R^+)

พิจารณากราฟของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลต่อไปนี้

1) $y = 2^x$



2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



จะเห็นได้ว่า สำหรับจำนวนจริง $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และสำหรับจำนวนจริง $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ จะเป็นฟังก์ชันลด

จากกราฟทั้งสองจะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเราจะได้ว่าผกผันของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน เรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) ซึ่งเราจะพิจารณากันในลำดับต่อไป

แบบฝึกหัด 4.1

1. กำหนดให้ $y = 3^x$ จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
   1) โดยวิธีทางพีชคณิต
   2) โดยการวาดกราฟ
2. กำหนดให้ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
   1) โดยวิธีทางพีชคณิต
   2) โดยการวาดกราฟ
3. จงหาจุดตัดของกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในข้อ 1 และข้อ 2 และจงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของกราฟดังกล่าวกับจุดกำเนิด
4. กำหนดให้ $y = a^x$ สำหรับบางจำนวนจริง $a > 1$ ถ้าทราบว่ากราฟนี้ผ่านจุด (2, 9) จงหาสมการของกราฟที่กำหนดให้นี้

4.2 ฟังก์ชันลอการิทึม

บทนิยาม 4.2

ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = a^y$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 1 เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

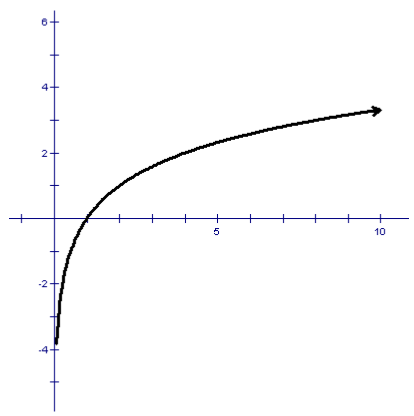
$$\mathbf{f = \{(x, y) \mid x = a^y,\ a \in R^+ \text{ และ } a \neq 1\}}$$

หรืออาจเขียนอีกรูปแบบหนึ่งคือ $f = \{(x, y) \mid y = \log_a x,\ a \in R^+, a \neq 1\}$

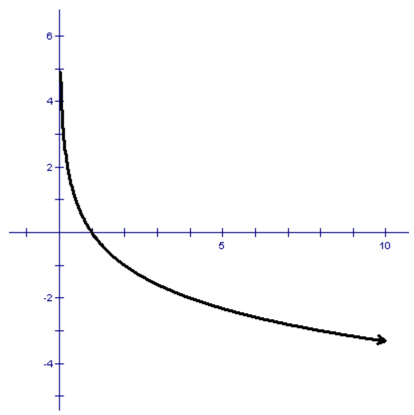
จากบทนิยาม 4.2 จะเห็นได้ว่าโดเมนของฟังก์ชันลอการิทึมคือ เซตของจำนวนจริงบวก (R^+) และเรนจ์ของฟังก์ชันลอการิทึมคือ เซตของจำนวนจริง (R)

พิจารณากราฟของฟังก์ชันลอการิทึมต่อไปนี้

1) $y = \log_2 x$



2) $y = \log_{1/2} x$



จะเห็นได้ว่า สำหรับจำนวนจริง $a > 1$ แล้วจะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และสำหรับจำนวนจริง $0 < a < 1$ แล้วจะเป็นฟังก์ชันลด ยิ่งกว่านั้นจะพบว่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเช่นเดียวกับฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล

แบบฝึกหัด 4.2

1. กำหนดให้ $y = \log_{1/3}x$ จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

4.3 สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

4.3.1 สมบัติทั่วไปของฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึมมีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ และนำไปใช้ในวงการต่างๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ $x > 0,\ y > 0$

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

4) $\log_x x = 1$

5) $\log_{a^b} x = \frac{1}{b}\log_a x$

6) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ เมื่อ $b > 0$

7) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ และ $x \neq 1$

8) $a^{\log_a x} = x$

9) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

พิสูจน์ ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์เพียงบางข้อเท่านั้น ข้อที่ยังไม่ได้พิสูจน์ให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

กำหนดให้ $M = \log_a x,\ N = \log_a y$ เมื่อ $x, y > 0$ โดยบทนิยาม 4.2 จะได้ว่า $x = a^M$ และ $y = a^N$

1) $$\begin{aligned} xy &= a^M \cdot a^N \\ &= a^{M+N} \\ \log_a(xy) &= \log_a(a^{M+N}) \\ &= M + N \\ &= \log_a x + \log_a y \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a^M}{a^N} \\ &= a^{M-N} \end{aligned}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^{M-N})$$
$$= M - N$$
$$= \log_a x - \log_a y$$

3) จาก $x = a^M$ จะได้ $x^k = (a^M)^k = a^{Mk}$

ดังนั้น $\log_a x^k = \log_a(a^{Mk}) = Mk = kM = k \cdot \log_a x$

4) กำหนดให้ $M = \log_x x$

จะได้ว่า $x^M = x$

นั่นคือ $M = 1 = \log_x x$

8) จาก $x = a^M$

ดังนั้น $x = a^{\log_a x}$

9) ให้ $P = x^{\log_a y}$ จะได้

$$\log_a P = \log_a(x^{\log_a y})$$
$$= \log_a y \cdot \log_a x$$
$$= \log_a x \cdot \log_a y$$
$$= \log_a(y^{\log_a x})$$

เนื่องจากลอการิทึมเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $P = y^{\log_a x}$

ดังนั้น $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ ตามต้องการ ❑

หมายเหตุ ในหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้จะพิจารณาลอการิทึมสามัญ (primary logarithm) หรือ $\log_{10} x$ เป็นหลัก และเพื่อความสะดวกจะเขียนแทน $\log_{10} x$ ด้วย $\log x$

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $\log 2 = a$ และ $\log 3 = b$ จงหาค่าของ $\log 24$ ในเทอมของ a กับ b

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์ $\log 24 = \log(2^3 \cdot 3)$

$$= 3\log 2 + \log 3$$
$$= 3a + b$$ ❑

แบบฝึกหัด 4.3 ก

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 4.1 ข้อที่ยังไม่ได้พิสูจน์นั้นเป็นจริง
2. กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ จงหาค่าต่อไปนี้
   1) $\log_2 10$
   2) $\log_{\sqrt{2}} 9$
   3) $\log_8 2^{\sqrt{24}}$

ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ

4.3.2 แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของลอการิทึม

พิจารณา $\log 24$ เมื่อกำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 3 = 0.4771$ เนื่องจาก $24 = 2^3 \cdot 3$ ดังนั้นจะได้ว่า $\log 24 = \log(2^3 \cdot 3) = 3\log 2 + \log 3 = 3(0.3010) + 0.4771 = 1.3801$

จาก $\log 24 = 1.3801 = 1 + 0.3801 = (\log 10) + 0.3801$ เราจะเรียก $\log 10 = 1$ ว่า "แคแรกเทอริสติก" และเรียก 0.3801 ว่า "แมนทิสซา" ของลอการิทึม

จากที่เราพิจารณามาตั้งแต่ต้น จะสามารถสรุปเป็นบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3
กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $x = k + \log M$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ M เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 แล้ว

1) แคแรกเทอริสติก (characteristic) คือ จำนวนเต็มบวก k
2) แมนทิสซา (mantissa) คือ $\log M$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาแคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของจำนวนต่อไปนี้

1) 441
2) 44.1
3) 4.41
4) 0.441
5) 0.0441

เมื่อกำหนดให้ $\log 4.41 = 0.644$

วิธีทำ 1) กำหนดให้ $N = 441$ จะได้ว่า

$$\log N = \log 441 = \log (4.41 \cdot 10^2)$$
$$= \log 4.41 + \log 10^2$$
$$= 0.644 + 2$$

ดังนั้น แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ 441 คือ 2 และ 0.644 ตามลำดับ

2) กำหนดให้ $N = 44.1$ จะได้ว่า

$$\log N = \log 44.1 = \log (4.41 \cdot 10)$$
$$= \log 4.41 + \log 10$$
$$= 0.644 + 1$$

ดังนั้น แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ 44.1 คือ 1 และ 0.644 ตามลำดับ

3) กำหนดให้ $N = 4.41$ จะได้ว่า $\log N = \log 4.41 = 0.644$

ดังนั้น แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ 4.41 คือ 0 และ 0.644 ตามลำดับ

4) กำหนดให้ $N = 0.441$ จะได้ว่า

$$\log N = \log 0.441$$
$$= \log (4.41 \cdot 10^{-1})$$
$$= \log 4.41 + (-1)$$

ดังนั้น แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ 0.441 คือ –1 และ 0.644 ตามลำดับ

5) กำหนดให้ $N = 0.0441$ จะได้ว่า

$$\log N = \log 0.0441$$
$$= \log (4.41 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 4.41 + (-2)$$

ดังนั้น แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ 0.441 คือ –2 และ 0.644 ตามลำดับ ❑

จากตัวอย่างข้างต้น เราได้ข้อสังเกตที่น่าสนใจ 2 ประการคือ

1) แคแรกเทอริสติกจะเป็นตัวบ่งบอกจำนวนหลักของ N กล่าวคือ ถ้าแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว จำนวนหลักของ N จะมากกว่าแคแรกเทอริสติกอยู่ 1 และในทางกลับกันถ้าแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเต็มลบแล้ว จำนวนหลักของ N จะน้อยกว่าแคแรกเทอริสติกอยู่ 1

2) แมนทิสซาของจำนวนที่ประกอบด้วยเลขโดดชุดเดียวกันจะมีค่าเท่ากันเสมอ ดังตัวอย่างข้างต้น เรามีเลขโดดชุดเดียวกันคือ 441 และจะเห็นได้ว่ามีแมนทิสซาเท่ากันคือ 0.644

แบบฝึกหัด 4.3 ข

1. กำหนดให้ $\log 3 = 0.4771$ จงหาค่าของ $\log R$ สำหรับจำนวนจริง R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกคาแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ R ด้วย
   1) 27
   2) $\frac{1}{27}$
   3) $81^{\sqrt{27}}$
2. จงหาจำนวนหลักของจำนวนจริง R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $R = 3^{100}$
   2) $R = 6^{-12}$
3. ถ้าทราบว่าแคแรกเทอริสติกของจำนวนจริง R เท่ากับ –3 และแมนทิสซาของ R เท่ากับ $\log 3$ แล้ว จงหาจำนวนจริง R ดังกล่าว

ღ ღ ღ ღ ღ ღ

4.4 ลอการิทึมธรรมชาติ

บทนิยาม 4.4
กำหนดให้ N เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $e \approx 2.718$ แล้วลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) คือ $\log_e N$ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์อีกลักษณะหนึ่งเพื่อความสะดวกคือ **ln N**

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 4.4 $\log_e N$ อาจทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายที่นำไปใช้งานได้สะดวกมากยิ่งขึ้นจากทฤษฎีบท 4.1 ข้อ (5) ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่ใช้ในการเปลี่ยนฐานของลอการิทึมโดยเราจะเปลี่ยนจากลอการิทึมฐาน e ไปอยู่ในรูปของลอการิทึมฐานสิบ ซึ่งเป็นลอการิทึมที่นิยมใช้ในปัจจุบันดังนี้

จาก $\log_e N = \dfrac{\log N}{\log e}$

แต่ $\log e = \log 2.718 = 0.434$ จะได้ว่า

$\log_e N = \dfrac{\log N}{0.434} = 2.304 \log N$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เราได้เคยพิจารณามาแล้วสำหรับลอการิทึมสามัญ ก็ยังคงเป็นจริงสำหรับลอการิทึมธรรมชาติด้วย

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ $\log 37 = 1.568$ จงหาค่าของ $\ln 0.37$ พร้อมทั้งบอกแคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ $\ln 0.37$ มาด้วย

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\ln 0.37 &= 2.304 \cdot \log 0.37 \\
&= 2.304 \cdot \log (37 \cdot 10^{-2}) \\
&= 2.304 \cdot (-2 + \log 37) \\
&= -4.608 + (2.304 \cdot \log 37)
\end{aligned}$$

ดังนั้น แคแรกเทอริสติกและแมนทิสซาของ $\ln 0.37$ เท่ากับ -4.608 และ $2.304 \cdot \log 37$ ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln 0.37 &= -4.608 + (2.304 \cdot 1.568) \\
&= -4.608 + 3.613 = -0.995
\end{aligned}$$

❑

ตัวอย่างที่ 4.4 จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $\frac{\ln 4 + \ln 6}{\ln 8 + \ln 3}$

วิธีทำ จากโจทย์

$$\begin{aligned}
\frac{\ln 4 + \ln 6}{\ln 8 + \ln 3} &= \frac{\ln (4 \cdot 6)}{\ln (8 \cdot 3)} \\
&= \frac{\ln 24}{\ln 24} \\
&= 1
\end{aligned}$$

❑

แบบฝึกหัด 4.4

จงพิสูจน์ว่าทฤษฎีบท 4.1 ยังคงเป็นจริงสำหรับลอการิทึมธรรมชาติ

ᘓ ᘓ ᘓ ᘓ ᘓ ᘓ

4.5 สมการและอสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล

4.5.1 สมการเอ็กซ์โพเนนเชียล

การแก้สมการเอ็กซ์โพเนนเชียล มีหลักการโดยทั่วไปที่ไม่ได้แตกต่างจากสมการพหุนามทั่วๆ ไป กล่าวคือ จะต้องทำให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการเป็นศูนย์ก่อน แล้วพยายามแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่อีกข้างหนึ่งของสมการ จากนั้นจึงใช้หลักการที่ว่า **“ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$”** เพื่อหาคำตอบของสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่อย่างไรก็ตาม ในการหาคำตอบของสมการเอ็กซ์โพเนนเชียลนั้นจะต้องมีการตรวจสอบคำตอบด้วยเสมอ พิจารณาจากตัวอย่างต่างๆ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.5 ผลบวกของคำตอบของสมการ $12^x - 2(3^x) - 9(4^x) + 18 = 0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้ $12^x - 2(3^x) - 9(4^x) + 18 = 0$

จัดรูปพหุนามที่อยู่ทางซ้ายของสมการใหม่ $(3 \cdot 4)^x - 2(3^x) - 9(4^x) + 18 = 0$

$3^x \cdot 4^x - 2(3^x) - 9(4^x) + 18 = 0$

$(3^x - 9)(4^x - 2) = 0$

$3^x - 9 = 0$ หรือ $4^x - 2 = 0$

$3^x = 9$ หรือ $4^x = 2$

$3^x = 3^2$ หรือ $2^{2x} = 2$

จะได้ว่า $x = 2$ หรือ $2x = 1$

ดังนั้น $x = 2$ หรือ $x = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น ผลบวกคำตอบของสมการ คือ $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ ❑

ตัวอย่างที่ 4.6 กำหนดให้เส้นโค้ง $y = 2^{2x} - 2^{x+2} - 45$ ตัดแกน X ที่จุด A ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B(0, b) ขนานกับเส้นตรง $y = (\log_3 2)x - 4$ แล้ว b มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากสมการของเส้นโค้งที่กำหนดให้คือ $y = 2^{2x} - 2^{x+2} - 45$

ให้จุด A เป็นจุดตัดแกน X ดังนั้น ให้ $y = 0$ จะได้ว่า

$2^{2x} - 2^{x+2} - 45 = 0$

$(2^x)^2 - 2^x \cdot 4 - 45 = 0$

$(2^x - 9)(2^x + 5) = 0$

ได้ $2^x - 9 = 0$ หรือ $2^x + 5 = 0$ (ใช้ไม่ได้)

ดังนั้น $2^x = 9$

นั่นคือ $x = \log_2 9$ และได้ว่า จุด A มีพิกัด $(\log_2 9, 0)$

โจทย์บอกว่า จุด A และจุด B(0, b) ขนานกับเส้นตรง $y = (\log_3 2)x - 4$

แสดงว่า ความชัน (m_1) ของเส้นตรงที่ผ่านจุด A กับจุด B และความชัน (m_2) ของเส้นตรง $y = (\log_3 2)x - 4$ มีค่าเท่ากัน

ดังนั้น $m_1 = m_2$ จะได้ว่า

$$\frac{b - 0}{0 - \log_2 9} = \log_3 2$$

$$\begin{aligned} b &= (\log_3 2)(0 - \log_2 9) = -\log_3 2 \cdot \log_2 9 \\ &= -\frac{\log_3 2}{\log_9 2} \\ &= -\frac{\log_3 2}{\frac{1}{2} \cdot \log_3 2} = -2 \end{aligned}$$ ❑

4.5.2 อสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล

การแก้อสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล มีหลักการคล้ายๆ กับการแก้สมการเอ็กซ์โพเนนเชียล แตกต่างกันตรงที่เราใช้เครื่องหมายอสมการ และมีข้อควรระวังก็คือการกลับเครื่องหมายของอสมการ โดยมีหลักการว่าถ้าฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลที่เรากำลังพิจารณาอยู่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ไม่จำเป็นต้องมีการกลับเครื่องหมายของอสมการ แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันลด จะต้องกลับเครื่องหมายของอสมการด้วยเสมอ พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2^{x^2(x-3)} < 8^{\left(\frac{2}{3}-x\right)}$

วิธีทำ จากอสมการที่กำหนดให้ $2^{x^2(x-3)} < 8^{\left(\frac{2}{3}-x\right)}$

สังเกตว่า เป็นอสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่ยังมีฐานไม่เท่ากัน ดังนั้น เราจึงต้องทำฐานให้เท่ากันเสียก่อน จะได้ว่า $2^{x^2(x-3)} < 2^{3\left(\frac{2}{3}-x\right)}$

และเนื่องจาก $2 > 0$ แสดงว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น

$x^2(x-3) \quad < \quad 3(\frac{2}{3}-x)$

$x^3-3x^2 \quad < \quad 2-3x$

$x^3-3x^2+3x-2 \quad < \quad 0$

เนื่องจาก พหุนามทางซ้ายของอสมการ แยกตัวประกอบได้ยาก เราจึงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือและการหารสังเคราะห์เพื่อช่วยแยกตัวประกอบ ดังนั้น เราให้ $P(x) = x^3-3x^2+3x-2$

เนื่องจาก $P(2) = 8-12+6-2 = 0$ ดังนั้น $x-2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ x^3-3x^2+3x-2

จะได้ว่า $x^3-3x^2+3x-2 \quad = \quad (x-2)(x^2-x+1)$

เพราะฉะนั้น $(x-2)(x^2-x+1) \; < \; 0$

แต่ $x^2-x+1 > 0$ เสมอ จึงได้ว่า $x-2 < 0$

นั่นคือ $x < 2$ เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, 2)$ ❑

4.6 สมการและอสมการลอการิทึม

4.6.1 สมการลอการิทึม

การแก้สมการลอการิทึม มีหลักการสำคัญๆ เหมือนกับการแก้สมการพหุนามและสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่มีข้อระมัดระวัง 2 ประการ ได้แก่

1) ก่อนการรวมลอการิทึม จะต้องปรับฐานของลอการิทึมให้เท่ากันเสียก่อน

2) จะต้องตรวจสอบคำตอบทุกครั้งด้วยว่าโดเมนของฟังก์ชันลอการิทึมต้องมากกว่า 1 เสมอ

พิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.8 ถ้า $\log_9 3,\ \log_9(3^x - 2),\ \log_9(3^x + 16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันในอนุกรมเลขคณิต และ S เป็นผลบวกของสี่พจน์แรกของอนุกรมนี้ แล้ว 3^S มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เนื่องจาก $\log_9 3,\ \log_9(3^x - 2),\ \log_9(3^x + 16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันในอนุกรมเลขคณิต ดังนั้น

จะได้ว่า $d_1 = \log_9(3^x - 2) - \log_9 3$

$$= \log_9\left(\frac{3^x - 2}{3}\right)$$

และ $d_2 = \log_9(3^x + 16) - \log_9(3^x - 2)$

$$= \log_9\left(\frac{3^x + 16}{3^x - 2}\right)$$

แต่ $d_1 = d_2$ (เนื่องจากเป็นลำดับเลขคณิต)

$$\log_9\left(\frac{3^x - 2}{3}\right) = \log_9\left(\frac{3^x + 16}{3^x - 2}\right)$$

$$\frac{3^x - 2}{3} = \frac{3^x + 16}{3^x - 2}$$

$$(3^x - 2)^2 = 3(3^x + 16)$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) + 4 = 3(3^x) + 48$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) + 4 - 3(3^x) - 48 = 0$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) - 3(3^x) - 44 = 0$$

$$(3^x)^2 - 7(3^x) - 44 = 0$$

$$(3^x - 11)(3^x + 4) = 0$$

จะได้ว่า $3^x - 11 = 0$ ($3^x + 4$ ใช้ไม่ได้)

ดังนั้น $x = \log_3 11$

นั่นคือ 3 พจน์ที่โจทย์กำหนดให้คือ $(\log_9 3) = \frac{1}{2}\ ,\ 1,\ \frac{3}{2}$

จากสมการ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

แทนค่า $n = 4,\ a_1 = \frac{1}{2}$ จะได้ $S_4 = \frac{4}{2}[2(\frac{1}{2}) + (4 - 1)\frac{1}{2}] = 2[1 + \frac{3}{2}] = 5$

เพราะฉะนั้น $3^S = 3^5 = 243$ ❑

ตัวอย่างที่ 4.9 x ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{\log 2x}{\log 3} + \log_3(x - 12) = \log_{\sqrt{3}}\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 5}\right)\right]$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ก่อนอื่นให้สังเกตว่า ฐานของลอการิทึมไม่เท่ากัน เราจึงปรับฐานของลอการิทึมให้เท่ากันเสียก่อน

$$\log_3 2x + \log_3(x-12) = 2\log_3\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}\right)\right]$$

$$\log_3 [2x(x-12)] = \log_3\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}\right)\right]^2$$

$$2x(x-12) = \left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}\right)\right]^2$$

$$2x(x-12) = x[(x+5)+(x-5)-2(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-5})]$$

$$2x(x-12) = x[2x-2(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-5})]$$

$$2x^2-24x = 2x^2-2x(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-5})$$

$$-24x = -2x(\sqrt{x+5})(\sqrt{x-5})$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$576x^2 = 4x^2(x^2-25)$$

$$= 4x^4-100x^2$$

$$4x^4-676x^2 = 0$$

$$4x^2(x^2-169) = 0$$

แก้สมการได้ $x = 0$ หรือ $x^2 = 169$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x = 13$ หรือ $x = -13$

แต่ค่า $x = 0$ และ $x = -13$ ทำให้สมการเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการมีเพียงคำตอบเดียว คือ $x = 13$ ❑

4.6.2 อสมการลอการิทึม

การแก้อสมการลอการิทึม มีหลักการคล้ายๆ กับการแก้สมการลอการิทึม แตกต่างกันตรงที่เราใช้เครื่องหมายอสมการ และมีข้อควรระวังก็คือ การกลับเครื่องหมายของอสมการ โดยมีหลักการว่า ถ้าฟังก์ชันลอการิทึมที่เรากำลังพิจารณาอยู่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ไม่จำเป็นต้องมีการกลับเครื่องหมายของอสมการ แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันลดจะต้องกลับเครื่องหมายของอสมการด้วยเสมอ พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.10 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_4\log_3\log_2(x^2+2x) \le 0$ จำนวนเต็มที่เป็นสมาชิกของ A มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จากอสมการ $\log_4\log_3\log_2(x^2+2x) \le 0$

จะได้ว่า $\log_3\log_2(x^2+2x) \le 1$ ($4 > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

$\log_2(x^2+2x) \le 3$ ($3 > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

$x^2+2x \le 8$ ($2 > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

$x^2+2x-8 \le 0$

$(x-2)(x+4) \quad 0$

จะได้ว่า $-4 \le x \le 2$ หรือเขียนเป็นช่วงได้ว่า $[-4, 2]$

แต่เนื่องจาก $x^2 + 2x > 0$ เสมอ จะได้ว่า $x(x + 2) > 0$

ดังนั้น $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

เพราะฉะนั้น คำตอบของอสมการคือ $A = [-4, 2] \cap [(-\infty, -2) \cup (0, \infty)] = [-4, -2) \cup (0, 2]$

และจะได้ว่า จำนวนเต็มที่เป็นสมาชิกของ A ได้แก่ $\{-4, -3, 1, 2\}$ ซึ่งมีทั้งหมด 4 จำนวน ❑

ภาคผนวก

<u>ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติสำหรับมุม 0° – 90°</u>

Degrees	Radians	sin	cos	tan	Degrees	Radians	sin	cos	tan
0	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	46	0.80285	0.71934	0.69466	1.03553
1	0.01745	0.01745	0.99985	0.01746	47	0.82030	0.73135	0.68200	1.07237
2	0.03491	0.03490	0.99939	0.03492	48	0.83776	0.74314	0.66913	1.11061
3	0.05236	0.05234	0.99863	0.05241	49	0.85521	0.75471	0.65606	1.15037
4	0.06981	0.06976	0.99756	0.06993	50	0.87266	0.76604	0.64279	1.19175
5	0.08727	0.08716	0.99619	0.08749	51	0.89012	0.77715	0.62932	1.23490
6	0.10472	0.10453	0.99452	0.10510	52	0.90757	0.78801	0.61566	1.27994
7	0.12217	0.12187	0.99255	0.12278	53	0.92502	0.79864	0.60182	1.32704
8	0.13963	0.13917	0.99027	0.14054	54	0.94248	0.80902	0.58779	1.37638
9	0.15708	0.15643	0.98769	0.15838	55	0.95993	0.81915	0.57358	1.42815
10	0.17453	0.17365	0.98481	0.17633	56	0.97738	0.82904	0.55919	1.48256
11	0.19199	0.19081	0.98163	0.19438	57	0.99484	0.83867	0.54464	1.53986
12	0.20944	0.20791	0.97815	0.21256	58	1.01229	0.84805	0.52992	1.60033
13	0.22689	0.22495	0.97437	0.23087	59	1.02974	0.85717	0.51504	1.66428
14	0.24435	0.24192	0.97030	0.24933	60	1.04720	0.86603	0.50000	1.73205
15	0.26180	0.25882	0.96593	0.26795	61	1.06465	0.87462	0.48481	1.80405
16	0.27925	0.27564	0.96126	0.28675	62	1.08210	0.88295	0.46947	1.88073
17	0.29671	0.29237	0.95630	0.30573	63	1.09956	0.89101	0.45399	1.96261
18	0.31416	0.30902	0.95106	0.32492	64	1.11701	0.89879	0.43837	2.05030
19	0.33161	0.32557	0.94552	0.34433	65	1.13446	0.90631	0.42262	2.14451
20	0.34907	0.34202	0.93969	0.36397	66	1.15192	0.91355	0.40674	2.24604
21	0.36652	0.35837	0.93358	0.38386	67	1.16937	0.92050	0.39073	2.35585
22	0.38397	0.37461	0.92718	0.40403	68	1.18682	0.92718	0.37461	2.47509
23	0.40143	0.39073	0.92050	0.42447	69	1.20428	0.93358	0.35837	2.60509
24	0.41888	0.40674	0.91355	0.44523	70	1.22173	0.93969	0.34202	2.74748
25	0.43633	0.42262	0.90631	0.46631	71	1.23918	0.94552	0.32557	2.90421
26	0.45379	0.43837	0.89879	0.48773	72	1.25664	0.95106	0.30902	3.07768
27	0.47124	0.45399	0.89101	0.50953	73	1.27409	0.95630	0.29237	3.27085
28	0.48869	0.46947	0.88295	0.53171	74	1.29154	0.96126	0.27564	3.48741
29	0.50615	0.48481	0.87462	0.55431	75	1.30900	0.96593	0.25882	3.73205
30	0.52360	0.50000	0.86603	0.57735	76	1.32645	0.97030	0.24192	4.01078
31	0.54105	0.51504	0.85717	0.60086	77	1.34390	0.97437	0.22495	4.33148
32	0.55851	0.52992	0.84805	0.62487	78	1.36136	0.97815	0.20791	4.70463
33	0.57596	0.54464	0.83867	0.64941	79	1.37881	0.98163	0.19081	5.14455
34	0.59341	0.55919	0.82904	0.67451	80	1.39626	0.98481	0.17365	5.67128
35	0.61087	0.57358	0.81915	0.70021	81	1.41372	0.98769	0.15643	6.31375
36	0.62832	0.58779	0.80902	0.72654	82	1.43117	0.99027	0.13917	7.11537
37	0.64577	0.60182	0.79864	0.75355	83	1.44862	0.99255	0.12187	8.14435
38	0.66323	0.61566	0.78801	0.78129	83	1.44862	0.99255	0.12187	8.14435
39	0.68068	0.62932	0.77715	0.80978	84	1.46608	0.99452	0.10453	9.51436
40	0.69813	0.64279	0.76604	0.83910	85	1.48353	0.99619	0.08716	11.43005
41	0.71558	0.65606	0.75471	0.86929	86	1.50098	0.99756	0.06976	14.30067
42	0.73304	0.66913	0.74314	0.90040	87	1.51844	0.99863	0.05234	19.08114
43	0.75049	0.68200	0.73135	0.93252	88	1.53589	0.99939	0.03490	28.63625
44	0.76794	0.69466	0.71934	0.96569	89	1.55334	0.99985	0.01745	57.28996
45	0.78540	0.70711	0.70711	1.00000	90	1.57079	1.00000	0.00000	Infinity value

บรรณานุกรม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

ชมรมบัณฑิตแนะแนว. **เฉลยข้อสอบ ENT มีนาคม 44**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2544.

______________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 45**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2545.

______________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 46**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2546.

______________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 48**. กรุงเทพฯ : รุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์, 2548.

ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และคณะ. **เอกสารประกอบคำบรรยายวิชาคณิตศาสตร์ 1 ในโครงการแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ 2004**. กรุงเทพฯ : ชมรมบัณฑิตแนะแนว, 2547.

มานัส บุญยัง. **สัมมนาคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2533.

สุรศักดิ์ วัฒเนสก์ และคณะ. **เฉลย Ent' ตุลาคม 43 แผนกวิทย์**. กรุงเทพฯ : ประชากรธุรกิจ, 2543.

อเนก หิรัญ. **รวมหลักคณิตศาสตร์ ม.4 (ค 011, ค 012)**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2539.