ลำดับและอนุกรม
(Sequences and Series)

หนังสือเรียนออนไลน์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ชุด “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” เล่มที่ 10

สัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 2

“การปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นการปรับปรุงครั้งที่ 2 ซึ่งห่างจากการปรับปรุงครั้งแรกกว่า 2 ปี โดยในการปรับปรุงครั้งนี้ผู้เขียนได้แก้ไขคำอธิบายเนื้อหาในหัวข้อ 1.1 พร้อมทั้งแก้ไขและเพิ่มเติมตัวอย่างไว้ด้วย นอกจากนั้นก็ยังได้แก้ไขคำอธิบายในหัวข้ออื่นๆ ให้มีความชัดเจนและถูกต้องตามหลักวิชามากยิ่งขึ้น

หวังว่าการปรับปรุงในครั้งนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านบ้างไม่มากก็น้อย หากผู้อ่านมีคำแนะนำเกี่ยวกับหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้ก็สามารถติดต่อกับผู้เขียนได้ตามที่อยู่อีเมล์ซึ่งไว้ให้แล้วบนเว็บไซต์”

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

16 มีนาคม พ.ศ. 2552

คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 3

“การปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์ในครั้งที่ 3 นี้ ผู้เขียนได้แนะนำลำดับโคชี (Cauchy Sequence) ไว้ในแบบฝึกหัด 1.4 ซึ่งมีบทบาทสำคัญในวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ โดยลำดับโคชีเป็นลำดับที่มีสมบัติ คือ เราสามารถหาจำนวนเต็มบวกตัวหนึ่งซึ่งทำให้สองพจน์ใดๆ ของลำดับนี้อยู่ห่างกันไม่เกินจำนวนจริงบวกใดๆ ที่กำหนดให้ได้เสมอ

ผู้เขียนหวังว่าการปรับปรุงในครั้งนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านบ้างไม่มากก็น้อย ทั้งนี้ ผู้อ่านที่มีข้อเสนอแนะเกี่ยวกับหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้สามารถติดต่อกับผู้เขียนได้ตามที่อยู่อีเมล์ซึ่งให้ไว้แล้วบนเว็บไซต์”

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

16 สิงหาคม พ.ศ. 2552

คำนำ

"หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นเล่มที่ 10 ในจำนวน 15 เล่ม ซึ่งผู้เขียนได้จัดทำขึ้นโดยมีเนื้อหาเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม โดยเริ่มต้นจากบทที่ 1 ความหมายของลำดับ ลำดับชนิดต่างๆ ลิมิตของลำดับ ลำดับแกว่งกวัด และลำดับฟีโบนักชี

ในบทที่ 2 เราจะขยายแนวคิดไปสู่อนุกรม โดยเริ่มต้นจากการให้ความหมายของอนุกรม อนุกรมชนิดต่างๆ นอกจากนั้นแล้วยังได้ยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรม โดยผู้เขียนนำมาจากข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัยที่น่าสนใจในปีที่ผ่านๆ มา รวมทั้งจากตำราเรียนในระดับอุดมศึกษาด้วย

ปิดท้ายในบทที่ 3 เกี่ยวกับอนุกรมไม่จำกัดโดยจะเริ่มต้นจากการให้ความหมายของอนุกรมไม่จำกัด การลู่เข้าของอนุกรมไม่จำกัด นอกจากนั้นแล้วยังจะแนะนำอนุกรมไม่จำกัดบางอย่างที่น่าสนใจเอาไว้ด้วย รวมทั้งได้เพิ่มเติมเกี่ยวกับการเขียนจำนวนตรรกยะในรูปของผลบวกของอนุกรมไม่จำกัดเอาไว้ด้วย

ผู้เขียนหวังว่าการจัดทำหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้จะมีประโยชน์แก่ผู้อ่านบ้างไม่มากก็น้อย และเชื่อว่ายังมีข้อผิดพลาดที่ต้องได้รับการแก้ไขอีกพอสมควร จึงขอให้ผู้อ่านได้ให้คำแนะนำต่างๆ ที่มีประโยชน์แก่ผู้เขียนเพื่อที่จะได้พิจารณาแก้ไขต่อไป"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

4 สิงหาคม พ.ศ. 2549

คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 1

"การปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้นับเป็นครั้งแรก โดยผู้เขียนได้ทำการปรับปรุงคำอธิบายในหัวข้อที่ 1.5 เรื่องลำดับแกว่งกวัดเสียใหม่ให้ถูกต้องตามบทนิยามและทฤษฎีบท พร้อมทั้งเพิ่มเติมแบบฝึกหัดเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจในเนื้อหาเอาไว้ด้วย ผู้เขียนหวังว่าการปรับปรุงในครั้งนี้จะช่วยให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจในเนื้อหาได้อย่างชัดเจนและถูกต้องมากยิ่งขึ้น"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

16 พฤศจิกายน พ.ศ. 2549

สารบัญ

บทที่ 1

ลำดับ

1.1 ลำดับ

บทนิยาม 1.1

ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นโดเมน และมีสับเซตของจำนวนจริงเป็นเรนจ์ และใช้สัญลักษณ์ $\{a_n\}$ แทนพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $a_n = 3n+1$ จงหา 5 พจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ จะได้ว่า

$a_1 = 3(1)+1 = 4$

$a_2 = 3(2)+1 = 7$

$a_3 = 3(3)+1 = 10$

$a_4 = 3(4)+1 = 13$

$a_5 = 3(5)+1 = 16$

เพราะฉะนั้น 5 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3n+1$ คือ 4, 7, 10, 13, 16 ❑

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $\{-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{16}, \ldots\}$ เป็นลำดับ จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

วิธีทำ เนื่องจาก

$$-3 = (-1)\left(\frac{3}{2^0}\right)$$

$$\frac{3}{2} = (-1)^2\left(\frac{3}{2^1}\right)$$

$$-\frac{3}{4} = (-1)^3\left(\frac{3}{2^2}\right)$$

$$\frac{3}{8} = (-1)^4\left(\frac{3}{2^3}\right)$$

$$-\frac{3}{16} = (-1)^5\left(\frac{3}{2^4}\right)$$

เพราะฉะนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ $a_n = (-1)^n\left(\frac{3}{2^{n-1}}\right)$ เมื่อ $n = I$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ a_n เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล $1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots, \underbrace{n, n, n, \ldots, n}_{\text{n พจน์}}$

จงหาพจน์ที่ 2552

วิธีทำ ก่อนอื่นเราต้องหาพจน์ทั่วไป (a_n) ของลำดับนี้ให้ได้เสียก่อน

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ a_n = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่กำหนดให้ในโจทย์

เพื่อจะให้ได้ a_n ที่เราต้องการ เราต้องทราบข้อมูล 2 อย่าง ได้แก่ ผลบวกของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ กับจำนวนข้อมูลทั้งหมด ซึ่งเราจะเห็นได้โดยง่ายว่า

ผลบวกของข้อมูลทั้งหมด $= 1(1) + 2(2) + 3(3) + \ldots + n(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

และจำนวนข้อมูลทั้งหมด $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$

เพราะฉะนั้น $a_n = \dfrac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{1}{3}(2n+1)$

จะได้ว่า $a_{2552} = \frac{1}{3}(2(2552)+1) = \frac{5105}{3}$ ❑

<u>**หมายเหตุ**</u> ดูแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 1 (1) และ (2)

จากตัวอย่างที่ 1.1 และตัวอย่างที่ 1.2 จะเห็นได้ว่า เราอาจจำแนกลำดับออกเป็น 2 ชนิด ตามจำนวนพจน์ของลำดับ กล่าวคือ ลำดับใดมีจำนวนพจน์จำกัด เราจะเรียกลำดับนั้นว่า **"ลำดับจำกัด"** (finite sequence) และถ้าลำดับมีจำนวนพจน์ไม่จำกัด เราก็เรียกว่า **"ลำดับไม่จำกัด"** (infinite sequence) หรือตำราบางเล่มอาจใช้คำว่าลำดับอนันต์ก็ได้ ทั้งนี้ เราอาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า "ลำดับจำกัด" คือ ฟังก์ชันที่มีสับเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นโดเมน และมีสับเซตของเซตของจำนวนจริงเป็นเรนจ์ และ "ลำดับไม่จำกัด" คือ ฟังก์ชันที่มีเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นโดเมนและมีเซตของจำนวนจริงเป็นเรนจ์ก็ได้

อนึ่ง หลักเกณฑ์ในการจำแนกลำดับนั้นอาจขึ้นอยู่กับลักษณะเฉพาะของลำดับนั้น เช่น ผลต่างร่วมของลำดับ หรืออัตราส่วนร่วมของลำดับ หรือการลู่เข้า – ลู่ออกของลำดับนั้นก็ได้ ซึ่งเราจะได้พิจารณาในรายละเอียดต่อไป

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับหรือไม่ เมื่อให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และทุกๆ S_i ที่กำหนดให้เป็นสับเซตของจำนวนจริง

   1) $f_1 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow R$

   2) $g_1 : \{1, 2, 3, \ldots\} \rightarrow R$

   3) $h_1 : \{1, 3, 5, \ldots\} \rightarrow S_1$

4) $f_2 : \{1, 3, 5, \ldots\} \longrightarrow R$

5) $g_2 : \{1, 2, 3, \ldots\} \longrightarrow S_2$

6) $h_2 : S_3 \longrightarrow R$

2. จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับไม่จำกัด

1) $\{a_n \mid a_n = n^2 - 4$ และ $1 \le n \le 6$, n เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$

2) $\{a_n \mid a_n = \dfrac{3}{n^2 + 1}$ และ $n \ge 1$, n เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$

3) $\{a_n \mid a_n = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{n - \dfrac{1}{n+1}}}$ และ $n \ge 1$, n เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$

1.2 ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม 1.2

ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือ ลำดับซึ่งผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าคงที่ และเรียกค่าคงที่นี้ว่า "ผลต่างร่วม" (common difference)

จากบทนิยาม 1.2 จะได้ว่า

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$

… … …

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

เพราะฉะนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ลำดับเลขคณิตจะมีพจน์ทั่วไปคือ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ เมื่อ a_1 คือพจน์แรกของลำดับเลขคณิต d คือผลต่างร่วม และ a_n คือพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{-1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-1 = -1$

$1 = (-1) + 2$

$3 = 1 + 2$

$5 = 3 + 2$

$7 = 5 + 2$

…

เพราะฉะนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ $\{-1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ คือ $a_n = -1 + (n-1)(2) = -3 + 2n$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $1 = 1$

$3 = 1 + 2$

$5 = 3 + 2$

$7 = 5 + 2$

…

เพราะฉะนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ คือ $a_n = 1 + (n-1)(2) = -1 + 2n$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.5 ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์แรก, พจน์กลาง และพจน์ท้ายเป็นเลขคู่ ถ้าพจน์ข้างเคียงพจน์กลางเท่ากับ –14 และ –26 แล้วจงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

วิธีทำ โจทย์กำหนด *พจน์ข้างเคียงพจน์กลาง* มาให้

เนื่องจากพจน์กลางคือ $\frac{n}{2}$ ดังนั้น พจน์ข้างเคียงพจน์กลางก็ได้แก่ $\frac{n}{2} - 1$ และ $\frac{n}{2} + 1$

จากสมการ $a_n = a_1 + (n-1)d$ -----(1.2.1)

แทนค่า $-14 = a_{(n/2)+1} = a_1 + \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) - 1\right]d = a_1 + \left(\frac{n}{2}\right)d$ -----(1.2.2)

แทนค่า $-26 = a_{(n/2)-1} = a_1 + \left[\left(\frac{n}{2} - 1\right) - 1\right]d = a_1 + \left(\frac{n}{2} - 2\right)d$

$= a_1 + \left(\frac{n}{2}\right)d - 2d$ -----(1.2.3)

แทนค่าสมการ (1.2.2) ลงในสมการ (1.2.3) จะได้ว่า

$-26 = -14 - 2d$

$2d = -14 + 26 = 12$

ดังนั้น $d = 6$ แทนค่า $d = 6$ ลงในสมการ (1.2.2) จะได้ว่า

$-14 = a_1 + \left(\frac{n}{2}\right)(6) = a_1 + 3n$

ดังนั้น $a_1 = -14 - 3n$ -----(1.2.4)

จากสมการ $a_n = a_1 + (n-1)d$ แทนค่า $a_1 = -14 - 3n$, $d = 6$ จะได้ว่า

$a_n = (-14 - 3n) + (n-1)(6) = -14 - 3n + 6n - 6 = -20 - 3n$

เพราะฉะนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ $a_n = -20 - 3n$ ❑

มีลำดับอีกชนิดหนึ่งซึ่งสร้างขึ้นมาจากลำดับเลขคณิตดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.3
ลำดับ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก ก็ต่อเมื่อลำดับ $\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots\}$ เป็นลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1.6 จงแสดงว่าลำดับ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก

วิธีทำ เนื่องจาก

$$1 = \frac{1}{1}$$

$$2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_n}\right)}$$

และเพราะว่า $\{1, 2, 3, \ldots, a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ เป็นลำดับฮาร์มอนิกตามต้องการ ❑

แบบฝึกหัด 1.2

1. ให้ 5, x, 20, … เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลบวกของ 12 พจน์แรกเป็น a และ 5, y, 20, … เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ 6 เป็น b โดยที่ $y < 0$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด
2. พจน์แรกที่เป็น**จำนวนเต็มลบ**ของลำดับเลขคณิต 200, 182, 164, 146, … มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 เท่ากับเท่าใด
3. (ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์ พ.ศ. 2549) ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีทุกพจน์เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าผลบวก 9 พจน์แรกมีค่าเท่ากับพจน์ที่ 43 ของลำดับ และพจน์ที่ 5 มีค่าน้อยกว่า 20 แล้ว พจน์ที่ 15 มีค่าเท่าใด

1.3 ลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม 1.4
ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence) คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันเท่ากับจำนวนจริงคงที่ค่าหนึ่ง และเรียกจำนวนจริงคงที่นี้ว่า "อัตราส่วนร่วม" (common ratio)

จากบทนิยาม 1.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= ra_1 \\
a_3 &= ra_2 = r^2a_1 \\
a_4 &= ra_3 = r^3a_1 \\
&\ldots \quad \ldots \\
a_n &= ra_{n-1} = r^{n-1}a_1
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ลำดับเรขาคณิตจะมีพจน์ทั่วไปคือ $a_n = a_1r^{n-1}$ เมื่อ a_1 คือพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต r คือผลต่างร่วม และ a_n คือพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \\
\tfrac{1}{2} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \\
\tfrac{1}{4} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
\tfrac{1}{8} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n ❑

แบบฝึกหัด 1.3

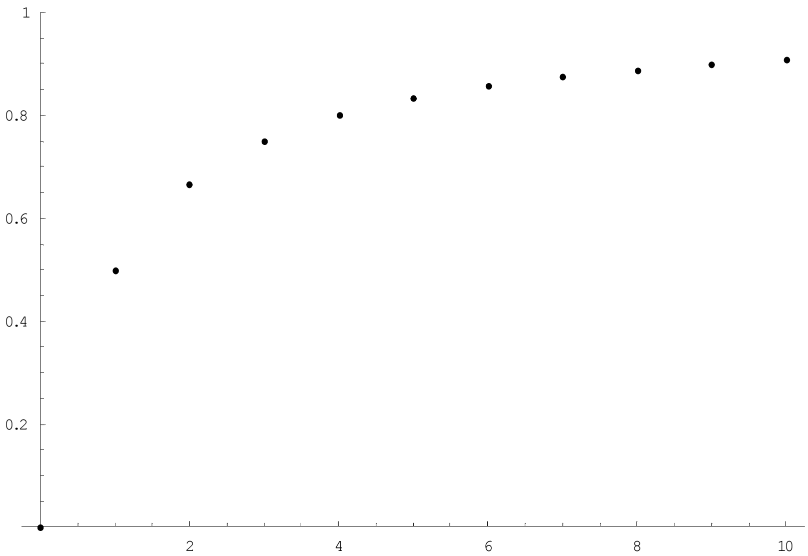
1. กำหนดให้ a, b, c เป็น 3 พจน์เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต และมีผลคูณเป็น 27 ถ้า a, b + 3, c + 2 เป็นสามพจน์เรียงติดกันในลำดับเลขคณิตแล้ว a + b + c มีค่าเท่ากับเท่าใด
2. กำหนดให้ a + 3, a, a – 2 เป็นสามพจน์เรียงกันของลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น r แล้วค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เท่ากับเท่าใด

3. ให้ x, y, z, w เป็นพจน์ 4 พจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต โดยที่ x เป็นพจน์แรก ถ้า $y + z = 6$ และ $z + w = -12$ จงหาค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

1.4 ลิมิตของลำดับ

พิจารณาลำดับ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ วาดกราฟโดยให้แกนนอนเป็นค่าของจำนวนเต็มบวก n ซึ่งเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด และให้แกนตั้งเป็นค่าของ a_n สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่สมนัยกันได้ดังนี้



รูป 1.1 กราฟของ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

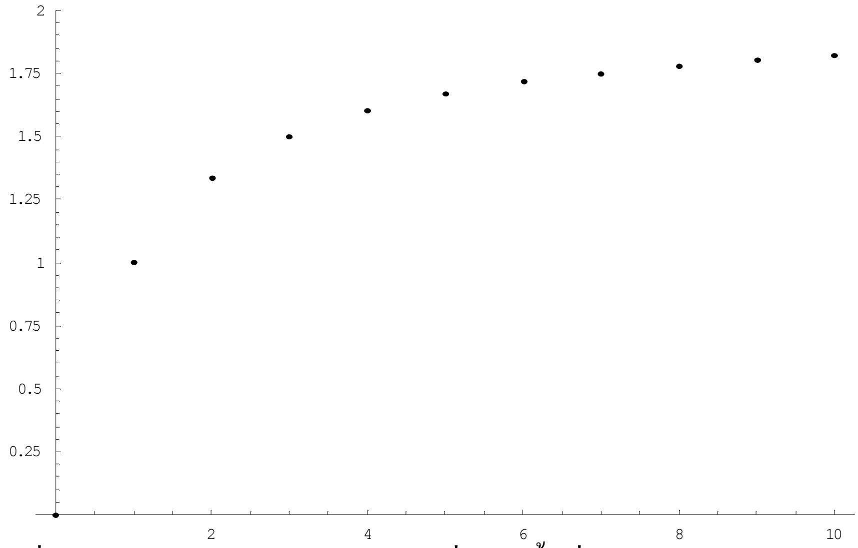
จะเห็นว่าเมื่อ n มีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n \to \infty$) แล้วกราฟของ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ จะเข้าใกล้เส้นตรง $y = 1$ ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า ลำดับ a_n ลู่เข้าสู่ 1 หรือลิมิตของลำดับ a_n เท่ากับ 1 ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ คือ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

ในกรณีทั่วๆ ไป สำหรับจำนวนจริง L บางตัว จะกล่าวว่าลำดับ a_n ลู่เข้าสู่ L จะเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และเรียก a_n ว่า **"ลำดับลู่เข้า" (convergent sequence)** และในกรณีที่ไม่มีจำนวนจริง L ใดเลยที่ลำดับ a_n ลู่เข้าสู่ L จะเรียก a_n ว่า **"ลำดับลู่ออก" (divergent sequence)**

> **บทนิยาม 1.5**
> จะกล่าวว่าลำดับ a_n เป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ a_n ลู่เข้าสู่จำนวนจริง L บางตัว และกล่าวว่า a_n เป็นลำดับลู่ออกก็ต่อเมื่อลำดับ a_n ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนจริงใดเลย

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $a_n = \frac{2n}{n+1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิตของลำดับนี้

วิธีทำ วาดกราฟของ $a_n = \frac{2n}{n+1}$ โดยให้ n เป็นแกนนอนซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด และให้แกนตั้งเป็นค่าของ a_n ได้ดังนี้

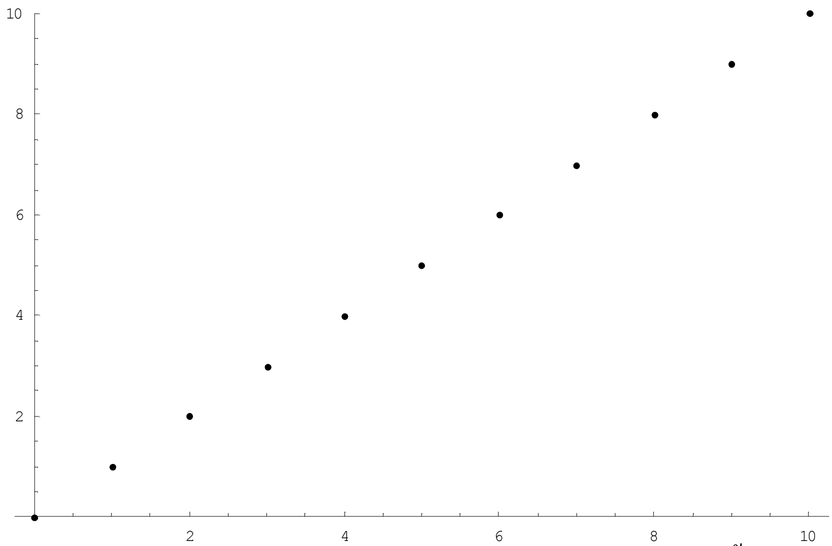


พิจารณาเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และมีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จะเห็นได้ชัดว่าลู่เข้าสู่ 2

เพราะฉะนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้าและได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้ $a_n = n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จงพิจารณาว่า a_n เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้าจงหาลิมิตของลำดับนี้

วิธีทำ วาดกราฟของ $a_n = n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ โดยให้แกนนอนเป็นค่าของ n ซึ่งเพิ่มขึ้นโดยไม่สิ้นสุด และให้แกนตั้งเป็นค่าของ a_n ได้ดังนี้



จะเห็นว่าเส้นกราฟไม่มีแนวโน้มที่จะลู่เข้าหาจำนวนจริงใดเลย เพราะฉะนั้น ลำดับนี้ลู่ออก ❑

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับลิมิตของลำดับมีอยู่มากมาย แต่ก่อนจะไปถึงจุดนั้นผู้เขียนจะขอให้บทนิยามลิมิตของลำดับในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง (Real Analysis) เสียก่อนดังนี้

บทนิยาม 1.6
กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีบางจำนวนเต็มบวก n_0 ที่ซึ่งสำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n ถ้า $n \geq n_0$ (โดยที่ N ขึ้นอยู่กับ ε) แล้ว $|a_n - L| < \varepsilon$

<u>ข้อสังเกต</u> ในการใช้บทนิยาม 1.6 ตรวจสอบว่าลิมิตของลำดับมีอยู่จริง หากทำโดยตรงจากบทนิยามจะทำได้ยาก ดังนั้น ในทางปฏิบัติจึงนิยมใช้การย้อนรอยโดยเริ่มต้นจากข้อความ $|a_n - L| < \varepsilon$ แล้วพยายามหาจำนวนเต็มบวก n_0 ที่ต้องการ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้อย่างรอบคอบจะช่วยให้เข้าใจบทนิยาม 1.6 มากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.10 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.6 เราจะต้องแสดงว่า

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, (n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon)$

ให้ $\varepsilon > 0$

โดยสมบัติของอาร์คิมีดิสจะได้ว่า มีบางจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่ง $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

เพราะฉะนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ถ้า $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

จะได้ว่า $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ ดังนั้น $\varepsilon > \frac{1}{n+1} = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ❑

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่น่าสนใจ ทฤษฎีบทใดที่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ขอให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัดโดยใช้แนวการพิสูจน์ตามที่ผู้เขียนได้แสดงไว้ประกอบกับการใช้บทนิยาม 1.6 ดังกล่าวแล้วข้างต้น

ทฤษฎีบท 1.1 (Uniqueness of limit of sequence)
ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$ แล้วจะได้ว่า $L_1 = L_2$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก N_1, N_2 ที่ซึ่ง

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ แล้ว $|a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

พิจารณา $|L_1 - L_2| = |(a_n - L_1) - (a_n - L_2)|$

$\leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2|$ ($\because$ อสมการของรูปสามเหลี่ยม)

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

จะได้ว่า $L_1 = L_2$ ตามต้องการ ❑

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 1.1 อาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ถ้าสามารถหาลิมิตของลำดับได้แล้ว ลิมิตของลำดับนั้นจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น (นั่นคือ ลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น)

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 1.1 ขอให้ผู้อ่านลองพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใดๆ ถ้า $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ แล้ว $L_1 = L_2$ (แนะนำ: ให้ใช้สมบัติของอาร์คิมีดิส (Archimedean Property))

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับพีชคณิตของลิมิตของลำดับ ซึ่งมีประโยชน์มากในการนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาลิมิตของลำดับ

ทฤษฎีบท 1.2

กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1) $\lim_{n\to\infty} k = k$
2) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kL$
3) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$
4) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M$
5) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$
6) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$
7) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = |L|$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ และ N_1, N_2 เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

1) จาก $0 = |k - k| < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} k = k$

2) กรณี $k = 0$ จะเห็นได้ว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

ดังนั้น สมมติว่า $k \neq 0$

จาก $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

ถ้า $n \geq N$ แล้ว $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$

พิจารณา $|ka_n - kL| = |k(a_n - L)| = |k||a_n - L| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$

3) จาก $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = M$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_1, N_2 ซึ่งสำหรับ $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

แล้ว $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

ดังนั้น $|(a_n + b_n) - (L + M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)|$

$$\leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$

4) พิจารณาลำดับ $a_n - b_n = a_n + (-b_n)$ และจากข้อ 3) ก็จะได้ตามที่ต้องการ

5) กำหนดให้ α เป็นขอบเขตบนของ $|a_n|$

จาก $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = M$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_1, N_2 ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ แล้ว $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M + 1|)}$

และ $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
|a_nb_n - LM| &= |a_nb_n - LM - a_nM + a_nM| \\
&= |(a_nb_n - a_nM) + (a_nM - LM)| \\
&= |a_n(b_n - M) + M(a_n - L)| \\
&\leq |a_n(b_n - M)| + |M(a_n - L)| \\
&= |a_n||(b_n - M)| + |M||(a_n - L)| \\
&< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \frac{\varepsilon}{2(|M + 1|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$

6) พิจารณาลำดับ $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ โดยที่ $b_n \neq 0$ และจากข้อ 5) ก็จะได้ตามต้องการ

7) จาก $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ แล้ว $|a_n - L| < \varepsilon$

จะได้ว่า $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$

ดังนั้น $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

จะได้ว่า $a_n < L + \varepsilon$

ดังนั้น $|a_n| < |L + \varepsilon| \leq |L| + |\varepsilon|$

จะได้ว่า $|a_n| - |L| < |\varepsilon|$

ดังนั้น $\left||a_n|-|L|\right| < \left|\left|\varepsilon\right|\right| = \varepsilon \; (\because \varepsilon > 0)$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

และจาก $|a_n - L| < \varepsilon$

จะได้ว่า $\left||a_n - L|\right| < |\varepsilon| = \varepsilon \; (\because \varepsilon > 0)$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$

และจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ จะเห็นได้ชัดว่า $\left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |L|$ ❑

<u>**หมายเหตุ**</u> สัญลักษณ์ $\max\{N_1, N_2\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก N_1, N_2 เมื่อกำหนดให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ หมายถึง $N \geq N_1$ หรือ $N \geq N_2$

อนึ่ง สืบเนื่องจากการหาลิมิตของลำดับโดยการวาดกราฟนั้นทำได้ยากในกรณีที่นิพจน์มีความซับซ้อนมากๆ ดังนั้น จึงมีการสร้างทฤษฎีบทขึ้นมาชุดหนึ่งเพื่ออำนวยความสะดวกในการหาลิมิตของลำดับให้ง่ายขึ้นดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k$ ลู่ออก

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n^k} = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง m, k และ $k > 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ \text{ลู่ออก} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

5) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\sqrt[m]{a_n}$ เป็นจำนวนจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[m]{a_n}\right) = \sqrt[m]{L}$

พิสูจน์ 1) พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กำหนดให้ P(k) แทนข้อความ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก k

<u>*ขั้นฐาน:*</u> เมื่อ k = 1 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย: กำหนดให้ k' เป็นจำนวนเต็มบวก

สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k'}} = 0$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k'+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k'}\cdot n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{k'}}\cdot\frac{1}{n}\right)$

$= \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k'}}\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)$ (ทฤษฎีบท 1.2 ข้อ 5))

$= 0\cdot 0$ (โดยสมมติฐาน และจากขั้นฐาน)

$= 0$

ดังนั้น โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k}} = 0$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก k

2) เนื่องจาก $n^k = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{n^k}\right)}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{n^k}\right)}$

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)}$

จากข้อ 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ ดังนั้น พจน์ $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)}$ จึงเกิดการหารด้วยศูนย์ซึ่งไม่นิยามในระบบจำนวนจริง เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^k$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่าลำดับลู่ออก

3) พิจารณา $\frac{m}{n^k} = m\cdot\frac{1}{n^k}$ และจากข้อ 1) ก็จะได้ตามต้องการ

4) *กรณี $-1 < x < 1$:* เนื่องจาก x^n เป็นลำดับเรขาคณิตที่ $|x| < 1$ ดังนั้น เป็นลำดับลู่เข้า และจากข้อ 1) ก็จะได้ตามต้องการ

กรณี $x = 1$: ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

กรณี $x > 1$: เนื่องจาก x^n เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $|x| > 1$ ดังนั้น เป็นลำดับลู่ออก

5) ให้ $L' = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[m]{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n\right)^{\frac{1}{m}}$

จะได้ว่า $\ell n\, L' = \ell n\left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n\right)^{\frac{1}{m}}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ell n\left(a_n\right)^{\frac{1}{m}}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{m}\cdot \ell n\left(a_n\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\ell n\left(a_n\right)\right]$$
$$= \frac{1}{m}\cdot \ell n\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$
$$= \frac{1}{m}\cdot \ell n\, L$$
$$= \ell n\, L^{\frac{1}{m}}$$

ดังนั้น $L' = L^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{L}$ ❑

<u>หมายเหตุ</u> เนื่องจากฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดในโดเมนที่กำหนดให้ ดังนั้น

$\lim_{n\to\infty} \ell n(a_n) = \ell n\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ สำหรับลำดับค่าจริง a_n

ตัวอย่างที่ 1.11 จงหาลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1) $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$

2) $b_n = \frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1}$

3) $a_n + b_n$

4) $a_n - b_n$

5) $a_n \cdot b_n$

6) $\frac{a_n}{b_n}$

วิธีทำ 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right)$$
$$= \frac{\left(\lim_{n\to\infty} 2\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty} 3\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\right)}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} 2\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} 3\right) + 4\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{2+0}{3+4\cdot 0}$$

$$= \frac{2}{3}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-4}{2n^2+1}\right)$

$$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3-\frac{4}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} 3\right) - \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} 2\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{3-0}{2+0}$$

$$= \frac{3}{2}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{13}{6}$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}$$

$$= 1$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{9}$$ ❑

ต่อไปเราจะพิจารณาลำดับที่มีพจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนพหุนาม (fractional polynomial) ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4

กำหนดให้ $P_n = \dfrac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + ... + a_{s-1} n^{s-1} + a_s n^s}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + ... + b_{t-1} n^{t-1} + b_t n^t}$ เป็นลำดับ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ s, t เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a_s, b_t \neq 0$ จะได้ว่า

1) ถ้า $s < t$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$

2) ถ้า $s = t$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \dfrac{a_s}{b_t}$

3) ถ้า $s > t$ แล้ว P_n ลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.4 เราจะนำไปใช้งานโดยขอละบทพิสูจน์ ขอให้ผู้อ่านพิจารณาตัวอย่างโจทย์ปัญหาต่อไปนี้จะช่วยให้เข้าใจทฤษฎีบท 1.4 มากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $a_n = 2 + 3n + n^2$ และ $b_n = 1 - 3n + 3n^2 - n^3$ นิยาม $P_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 + 3n + n^2}{1 - 3n + 3n^2 - n^3} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^3\left(\frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n} - 1\right)} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n} - 1} \right]$$

$$= \frac{0 + 0 + 0}{0 - 0 + 0 - 1}$$

$$= 0$$

หรืออาจใช้ทฤษฎีบท 1.4 จากโจทย์จะได้ว่า $s = 2,\ t = 3$ ดังนั้น $s < t$

จากข้อ 1) จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.13 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+3n^2-n^3+2n^4}{3-n^2+n^3-3n^4}\right)$

วิธีทำ จากโจทย์ เนื่องจาก s = t = 1 ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.4 ข้อ 2) สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+3n^2-n^3+2n^4}{3-n^2+n^3-3n^4}\right) = -\frac{2}{3}$$ ❑

<u>ข้อเสนอแนะ</u> จากตัวอย่างที่ 1.13 ขอให้ผู้อ่านลองหาค่าโดยไม่ใช้ทฤษฎีบท 1.4 แล้วเปรียบเทียบว่าค่าเท่ากันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1.14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{2}}}{n-n^{\frac{1}{2}}}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $s = \frac{1}{2}$, $t = 1$ จะเห็นว่า $s < t$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.4 ข้อ 1) สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{2}}}{n-n^{\frac{1}{2}}}\right) = 0$ ❑

<u>ข้อสังเกต</u> การหาลิมิตของลำดับที่มีรูปแบบของพจน์ทั่วไปดังตัวอย่างที่ 1.14 อาจทำได้โดยตรงไม่สะดวก การใช้ผลของทฤษฎีบท 1.4 จะช่วยให้การหาลิมิตที่มีรูปแบบดังกล่าวสะดวกยิ่งขึ้น

ในการตัดสินว่าลำดับที่เรากำลังพิจารณาอยู่นั้นลู่เข้าหรือลู่ออกอาจทำได้ยาก เราอาจตรวจสอบทางอ้อมโดยการตรวจสอบว่าลำดับข้างเคียงของลำดับที่เรากำลังพิจารณาอยู่นั้นลู่เข้าหรือลู่ออก ดังที่จะกล่าวถึงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5 (Squeeze Theorem for sequence)
กำหนดให้ a_n, b_n, c_n เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_n \le b_n \le c_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$
2) ถ้า b_n ลู่ออกแล้ว c_n ลู่ออกด้วย

พิสูจน์ กำหนดให้ a_n, b_n, c_n เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_n \le b_n \le c_n$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

1) กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N_1, N_2 ที่ซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge \max\{N_1, N_2\}$ แล้ว

$|a_n - L| < \varepsilon$ และ $|c_n - L| < \varepsilon$

จะได้ว่า $L - \varepsilon < a_n$ และ $c_n - L < \varepsilon$ หรือก็คือ $c_n < L + \varepsilon$

ดังนั้น $L-\varepsilon < a_n \le b_n$ และ $b_n \le c_n < L+\varepsilon$

และได้ว่า $L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$

หรือก็คือ $|b_n - L| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

2) โดยข้อความแย้งสลับที่ (contraposition) ข้อความที่ต้องการพิสูจน์จึงเปลี่ยนเป็นว่า "ถ้า c_n ลู่เข้าแล้ว b_n ลู่เข้าด้วย"

สมมติให้ $\varepsilon > 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge N$ แล้ว $|c_n - L| < \varepsilon$

จะได้ว่า $L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$

เนื่องจาก $b_n \le c_n$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

จะได้ว่า $L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$

ดังนั้น $|b_n - L| < \varepsilon$ และได้ว่า b_n ลู่เข้า

เพราะฉะนั้น จากข้อความแย้งสลับที่แสดงว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์นี้เป็นจริง ❑

ตัวอย่างที่ 1.15 จงพิจารณาว่าลำดับ $b_n = \dfrac{2n^2+5}{5n^3+4}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณาลำดับ $c_n = \dfrac{2n^2}{5n^3} = \dfrac{2}{5n}$

และ $a_n = \dfrac{2n^2+5}{5n^3+10} = \dfrac{2n^2+5}{5(n^3+2)}$

จะเห็นว่า $a_n \le b_n \le c_n$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

และเนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.5 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.16 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$

วิธีทำ เพราะว่า $\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}$ ดังนั้น $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{n}{2^n}$

และเพราะว่า $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n \ge 5$ จะได้ว่า $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$

โดยทฤษฎีบท 1.5 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$ ❑

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาค่าต่อไปนี้

   1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(0.999... + \frac{1}{n}\right)^n$

   3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}\right)^{\frac{1}{n}}$

   4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{8}} + ... + n^{\frac{1}{2^n}}}{n + n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{5}} + ... + n^{\frac{1}{2n-1}}}\right)$

   5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$

   6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}$

2. จงใช้ทฤษฎีบท 1.5 พิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ และหาค่าลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^n$

   3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^n$

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ กำหนดให้ $M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & n \\ -\frac{1}{n} & n+1 \end{bmatrix}$ และ $a_n = \det(M_n)$ แล้วจงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

4. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก $n \geq 4$ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{n^4 + 1}{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

5. ถ้า $a_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 1}$ และ $b_n = \dfrac{2^n - 5^n}{5^n + 9}$ แล้ว ลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น $a_n - b_n + a_nb_n$ มีค่าเท่าใด

6. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับค่าจริง จงพิสูจน์ว่าถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

7. สำหรับลำดับค่าจริง a_n ใดๆ จะกล่าวว่าเป็นลำดับโคชี (Cauchy Sequence) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่งสำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก m, n ถ้า $m \geq n_0$ และ $n \geq n_0$ แล้วจะได้ว่า $|a_n - a_m| < \varepsilon$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้
   1) ทุกๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี
   2) ถ้า a_n เป็นลำดับโคชี แล้วจะมีจำนวนจริง ξ ซึ่งสำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n แล้ว $|a_n| < \xi$
   3) กำหนดให้ a_n, b_n เป็นลำดับโคชี จงพิสูจน์ว่า $a_n + b_n$ เป็นลำดับโคชี

1.5 ลำดับแกว่งกวัด

พิจารณาลำดับ {–1, 2, –3, 4, –5, 6, …} ถ้านำลำดับที่กำหนดให้ดังกล่าวมาหาพจน์ทั่วไปแล้ว เราจะได้พจน์ทั่วไปเขียนในรูป $a_n = (-1)^n n$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

พิจารณาอีกตัวอย่างหนึ่ง {–1, 3, –5, 7, –9, 11, …} ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ผ่านมา เราสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ได้แก่ $b_n = (-1)^n(2n-1)$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

จะเห็นได้ว่า แต่ละพจน์ของลำดับทั้งสองดังกล่าวมีค่าสลับไปมาระหว่างค่าบวกกับค่าลบ เมื่อนำมาหาพจน์ทั่วไปแล้ว จะได้เป็นผลคูณของ $(-1)^n A_n$ โดยที่ A_n เป็นลำดับค่าจริงและเป็นลำดับลู่ออกแล้ว เราเรียกลำดับที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า "ลำดับแกว่งกวัด" (oscillating sequence)

บทนิยาม 1.7
ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence) คือ ลำดับที่เขียนอยู่ในรูป $a_n = (-1)^n A_n$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n และ A_n เป็นลำดับค่าจริงซึ่งลู่ออก

หมายเหตุ ผู้อ่านอาจพบว่าตำราบางเล่มใช้ "ลำดับสลับ" (alternating sequence) แทน "ลำดับแกว่งกวัด" ก็ได้

ตัวอย่างที่ 1.17 จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับแกว่งกวัด

1) $a_n = \frac{4n+3}{3n-1}$
2) $b_n = (-1)^n \frac{4n+3}{3n-1}$
3) $c_n = (-1)^n(3n-1)$

วิธีทำ โดยบทนิยาม 1.7

1) ลำดับ a_n ไม่ปรากฏว่ามีพจน์ของ $(-1)^n$ ดังนั้น ไม่เป็นลำดับแกว่งกวัด

2) ลำดับ b_n ปรากฏพจน์ของ $(-1)^n$ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{3n-1} = \frac{4}{3}$ แสดงว่าเป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้น b_n ไม่เป็นลำดับแกว่งกวัด

3) ลำดับ c_n ปรากฏพจน์ของ $(-1)^n$ และ $A_n = 3n - 1$ เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น c_n เป็นลำดับแกว่งกวัด ❑

ตัวอย่างที่ 1.18 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{3n-1}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (3n-1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{3n-1}$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{3n-1}$ จึงหาค่าไม่ได้

และในทำนองเดียวกัน เราก็สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (3n-1)$ หาค่าไม่ได้ ❑

ตัวอย่างที่ 1.19 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = (-1)^n n^n e^n$ เป็นลำดับแกว่งกวัดหรือไม่ และให้พิจารณาว่าเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้าให้หาลิมิตของลำดับนี้

วิธีทำ พิจารณาลำดับ $A_n = n^n e^n$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty} n^n e^n = \lim_{n\to\infty} n^n \left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \ldots\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^n \left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \ldots\right)$$

ซึ่งไม่สามารถหาลิมิตได้ แสดงว่า A_n ลู่ออกและได้ว่า a_n เป็นลำดับแกว่งกวัด

ต่อไปเราจะพิจารณาว่า a_n เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

สังเกตว่าถ้า n เป็นเลขคี่ เราได้ว่า $a_n = -n^n e^n$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเป็นลำดับลู่ออก

และเป็นการเพียงพอที่จะสรุปได้ว่า a_n เป็นลำดับลู่ออกด้วย ❑

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.18 และตัวอย่างที่ 1.19 จะเห็นได้ว่าไม่ว่าจะเป็นลำดับแกว่งกวัดก็ดีหรือลำดับที่คล้ายกับลำดับแกว่งกวัดก็ดีย่อมเป็นลำดับลู่ออกเสมอ

ตัวอย่างที่ 1.20 จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับแกว่งกวัด

1) $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

2) $b_n = \sin (-1)^n \frac{n\pi}{4}$

3) $c_n = \cos (-1)^n \frac{n\pi}{2^n}$

วิธีทำ จะเห็นได้ชัดว่า ทั้งสามลำดับที่กำหนดนี้ไม่เป็นลำดับแกว่งกวัด

เนื่องจากลำดับ a_n ไม่ปรากฏพจน์ $(-1)^n$ อยู่เลย และถึงแม้ว่าลำดับ b_n หรือลำดับ c_n จะปรากฏพจน์ $(-1)^n$ อยู่ แต่ก็ไม่ได้อยู่ในรูป $(-1)^n A_n$ โดยสังเกตว่าพจน์ $(-1)^n \frac{n\pi}{4}$ กับพจน์ $(-1)^n \frac{n\pi}{2^n}$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ตามลำดับเท่านั้น ❑

แบบฝึกหัด 1.5

จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ลำดับใดลู่เข้า ลำดับใดลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิตของลำดับนั้น

1. $a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$
2. $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$
3. $a_n = (-1)^n \frac{e^{-n}}{n^3}$
4. $a_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$
5. $a_n = (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

1.6 ลำดับฟีโบนักชี

ลำดับในธรรมชาติซึ่งเป็นที่รู้จักกันมากที่สุดเห็นจะได้แก่ “ลำดับฟีโบนักชี” (Fibonacci Sequence) โดยลำดับชนิดนี้ถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียนที่ชื่อ “ฟีโบนักชี” จากการสังเกตลำดับต่อไปนี้

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

ขอให้ผู้อ่านสังเกตว่า ทุกๆ พจน์ของลำดับตั้งแต่พจน์ที่ 3 เป็นต้นไปล้วนแต่เกิดขึ้นจากการบวกของพจน์ที่มาก่อนหน้า 2 พจน์ ตัวอย่างเช่น

$$F_3 = 2 = 1+1 = F_1 + F_2$$
$$F_4 = 3 = 1+2 = F_2 + F_3$$
$$F_5 = 5 = 2+3 = F_3 + F_4$$
$$F_6 = 8 = 3+5 = F_4 + F_5$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

จะเห็นได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 3$ ลำดับข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้คือ

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

โดยที่กำหนดค่าเริ่มต้น (initial value) คือ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$

บทนิยาม 1.8
ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequence) คือ ลำดับที่มีพจน์ทั่วไปอยู่ในรูป $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ โดยที่ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq 3$

ตัวอย่างที่ 1.21 จงพิจารณาว่าลำดับ 6, 7, 13, 20, 33, … เป็นลำดับฟีโบนักชีหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $13 = 6+7$

$20 = 7+13$

$33 = 13+20$

… … …

จะเห็นได้ว่าพจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูปของ $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ แต่ค่าเริ่มต้นไม่ใช่ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$ แสดงว่าลำดับที่กำหนดให้นี้ไม่ใช่ลำดับฟีโบนักชี ❑

พิจารณาลำดับ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … อย่างละเอียดอีกครั้ง โดยนำพจน์ที่ n ไปหารพจน์ที่ $n+1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ดังนี้

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$

ถ้ากำหนดให้ $x_1 = \frac{1}{1}$, $x_2 = \frac{2}{1}$, $x_3 = \frac{3}{2}, \ldots$ จะเห็นได้ว่า x_n สามารถเขียนได้ในรูป $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

พิจารณา
$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \qquad \text{-----(1.8.1)}$$
$$= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \qquad \text{(โดยการแทนค่า } n = n+1 \text{ ลงในสมการ } F_n = F_{n-2} + F_{n-1}\text{)}$$
$$= \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$
$$= 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$
$$= 1 + \frac{1}{F_{n-1}} \qquad \text{(โดยการแทนค่า } n = n-1 \text{ ลงในสมการ (1.8.1))}$$

สมมติว่า x_n ลู่เข้าสู่ x เมื่อ n ลู่เข้าสู่อนันต์ จะเห็นได้ชัดว่า F_{n-1} ก็ลู่เข้าสู่ x เช่นเดียวกัน

จะได้ว่า
$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{F_{n-1}}\right)$$
$$x = 1 + \frac{1}{x}$$
$$x - \frac{1}{x} = 1$$
$$\frac{x^2 - 1}{x} = 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{-----(1.8.2)}$$

แก้สมการ (1.8.2) จะได้ว่ารากที่เป็นบวกคือ $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ซึ่งค่านี้เป็นที่รู้จักกันมาตั้งแต่สมัยกรีกโดยนักคณิตศาสตร์เรียกจำนวนจริงนี้ว่า **"อัตราส่วนทอง" (golden ratio)** ความมหัศจรรย์ของอัตราส่วนทองที่พบเห็นในธรรมชาติมีหลายรูปแบบ ตัวอย่างเช่น

1) รูปดาวห้าแฉกที่สวยงามที่สุด ความยาวของแต่ละด้านจะต้องประกอบไปด้วยอัตราส่วนทอง
2) อัตราส่วนระหว่างส่วนสูงเอียงกับความยาวครึ่งฐานของพีระมิดในประเทศอียิปต์เป็นอัตราส่วนทอง
3) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีอัตราส่วนระหว่างความยาวกับความกว้างเป็นอัตราส่วนทอง เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สวยงามที่สุด และเรียกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า "สี่เหลี่ยมผืนผ้าทอง" (golden rectangle)
4) ภาพวาดโมนาลิซาของดาร์วินชี มีอัตราส่วนของขนาดใบหน้ากับขนาดร่างกายเป็นอัตราส่วนทอง

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงหาพจน์ที่ n ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ของลำดับฟีโบนักชี

   1) $n = 9$

   2) $n = 13$

   3) $n = 16$

2. จงหาพจน์แรกที่มากกว่า 100 ของลำดับฟีโบกนักชี

บทที่ 2

อนุกรม

2.1 อนุกรม

บทนิยาม 2.1

อนุกรม (series) คือ การเขียนผลบวกของลำดับต่างๆ เข้าด้วยกัน

โดยทั่วไป เรานิยมเขียนแทนอนุกรมด้วยเครื่องหมาย "ผลรวม" หรือ "Σ" และจากบทนิยาม 1.1 สามารถให้ความหมายของอนุกรมให้ชัดเจนยิ่งขึ้นโดยใช้เครื่องหมาย Σ ได้ดังนี้

บทนิยาม 2.2

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ และให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$ เป็นลำดับแล้ว $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$

อนึ่ง สมบัติของ Σ มีอยู่หลายประการซึ่งนำไปใช้ในคณิตศาสตร์ชั้นสูงรวมทั้งในสถิติศาสตร์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1

1) สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก i ถ้า $a_i = k$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} a_i = nk$

2) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

พิสูจน์ 1) กำหนดให้ $a_i = k$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก i จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \underbrace{k + k + k + \ldots + k}_{\text{n ตัว}} = nk$$

2) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_n$

$= k(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$

$= k\sum_{i=1}^{n} a_i$

3) $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + b_i\right) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n)$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4) พิจารณา $a_i - b_i = a_i + (-b_i)$ และจากข้อ 1) กับข้อ 3) ก็จะได้ตามต้องการ ❑

เนื่องจากเราแบ่งลำดับออกเป็น 2 ชนิด ได้แก่ ลำดับจำกัด และลำดับไม่จำกัด ในเรื่องอนุกรมก็เช่นเดียวกัน เราจะแบ่งอนุกรมออกเป็น 2 ชนิด ได้แก่ อนุกรมจำกัด และอนุกรมไม่จำกัด ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3

1) อนุกรมจำกัด (finite series) คือ อนุกรมที่มีจำนวนพจน์จำกัด

2) อนุกรมไม่จำกัด (infinite series) คือ อนุกรมที่มีจำนวนพจน์ไม่จำกัด

และถ้าพิจารณาเกี่ยวกับลักษณะการลู่เข้า – ลู่ออก ก็สามารถแบ่งได้เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series) และอนุกรมลู่ออก (divergent series) ดังนี้

บทนิยาม 2.4

1) อนุกรมลู่เข้า คือ อนุกรมที่มีลำดับของผลบวกย่อยลู่เข้า

2) อนุกรมลู่ออก คือ อนุกรมที่มีลำดับของผลบวกย่อยลู่ออก

พิจารณาจากตัวอย่างต่างๆ ดังต่อไปนี้จะช่วยให้เข้าใจบทนิยาม 2.3 และบทนิยาม 2.4 มากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.1 จงพิจารณาว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1024}$ เป็นอนุกรมชนิดใด

วิธีทำ จากบทนิยาม 2.3 จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมจำกัด ต่อไปจะพิจารณาว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าหรือไม่

ให้ S_n เป็นผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม จะได้ว่า

$S_1 = 1 \qquad = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad = \frac{3}{2}$

$S_3 = S_2 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \qquad = 1 + \frac{3}{4}$

$S_4 = S_3 + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

$S_5 = S_4 + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 1 + \frac{15}{16}$

$S_6 = S_5 + \frac{1}{32} = \frac{63}{32} = 1 + \frac{31}{32}$

$S_7 = S_6 + \frac{1}{64} = \frac{127}{64} = 1 + \frac{63}{64}$

$S_8 = S_7 + \frac{1}{128} = \frac{255}{128} = 1 + \frac{127}{128}$

$S_9 = S_8 + \frac{1}{256} = \frac{511}{256} = 1 + \frac{255}{256}$

$S_{10} = S_9 + \frac{1}{512} = \frac{1023}{512} = 1 + \frac{511}{512}$

$S_{11} = S_{10} + \frac{1}{1024} = \frac{2047}{1024} = 1 + \frac{1023}{1024}$

จะได้ว่า $S_n = 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$

โดยบทนิยาม 2.4 สรุปได้ว่า อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกของอนุกรมเท่ากับ S_{11} ❑

<u>หมายเหตุ</u> ในหัวข้อต่อๆ ไป เราจะได้ทราบว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตจำกัด (finite geometrical series) ซึ่งมีผลบวกเท่ากับ $\frac{2047}{1024} = S_{11}$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2.2 จงพิจารณาว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ เป็นอนุกรมชนิดใด

วิธีทำ จากบทนิยาม 2.3 อนุกรมนี้เป็นอนุกรมไม่จำกัด ต่อไปจะพิจารณาว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าหรือไม่

ให้ S_n เป็นผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม จะได้ว่า

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_3 = S_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = 2 - \frac{1}{6}$

$S_4 = S_3 + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12}$

$S_5 = S_4 + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} = 2 + \frac{17}{60}$

$S_6 = S_5 + \frac{1}{6} = \frac{147}{60} = 2 + \frac{27}{60}$

$S_7 = S_6 + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420} = 2 + \frac{249}{420}$

… … …

จะเห็นว่า ไม่สามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับผลบวกย่อยได้เลย จึงสรุปว่าเป็นอนุกรมลู่ออก ❑

<u>หมายเหตุ</u> ในบทนี้เราจะศึกษาเฉพาะอนุกรมจำกัดเสียก่อน สำหรับอนุกรมไม่จำกัดนั้นเราจะไปพิจารณาในบทที่ 3 ต่อไป

แบบฝึกหัด 2.1

1. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

   2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

2. สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n จงหาค่าพร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบของท่าน

   1) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right)^2$

   2) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right)^3$

3. จงพิสูจน์หรือพิสูจน์แย้ง $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

4. ถ้า $\sum_{i=1}^{10} x_i = -8$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 4$ และ $\sum_{i=1}^{10}(5 - x_i)(y_i + 2) = 76$ แล้ว $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. จงหาผลบวกของอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots - 99$

   2) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots - 100$

   3) $1 - 1 + 2 - 3 + 5 - 8 + \ldots - 55$

   4) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

   5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

6. จงหาค่าของ $-\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ - \sin^2 3^\circ + \ldots - \sin^2 89^\circ$

2.2 อนุกรมเลขคณิต

บทนิยาม 2.5

อนุกรมเลขคณิต (arithmetic series) คือ อนุกรมที่ได้จากการนำลำดับเลขคณิตมาบวกกัน

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $a_n = 2n + 3$ เป็นลำดับเลขคณิต จงหาผลบวกของ a_n จำนวน 10 พจน์แรก

วิธีทำ

$$\sum_{i=1}^{10} a_n = \sum_{i=1}^{10} (2n+3)$$

$$= \sum_{i=1}^{10} (2n) + \sum_{i=1}^{10} (3)$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{10} n + (10)(3)$$

$$= 2 \cdot \frac{10}{2}(10+1) + (10)(3)$$

$$= 110 + 30 = 140$$ ❑

ในกรณีที่ต้องการหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต แต่ไม่ได้กำหนดพจน์ทั่วไปมาให้ดังเช่นในตัวอย่างที่ 2.3 ก็อาจทำได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตใช้สัญลักษณ์คือ S_n หาได้จากสมการ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ เมื่อ a_1 คือพจน์แรกในลำดับเลขคณิต, d คือผลต่างร่วมในลำดับเลขคณิต

พิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

ขั้นฐาน: ให้ $n = 1$ จะได้ว่า $S_1 = \frac{1}{2}[2a_1 + (1-1)d] = a_1$ จริง

ขั้นอุปนัย: ให้ $n = k$

สมมติว่า P(k) เป็นจริง จะแสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

พิจารณาพจน์ $S_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] + a_{k+1}$

$$= \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] + (a_1 + kd) \quad (\because\ a_k = a_1 + (k-1)d)$$

$$= ka_1 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}kd + (a_1 + kd)$$

$$= (ka_1 + a_1) + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}kd$$

$$= \frac{1}{2}[2(k+1)a_1] + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}kd$$

$$= \frac{1}{2}[2(k+1)a_1 + k^2 + kd]$$

$$= \frac{1}{2}[2(k+1)a_1 + k(k+1)d]$$

$= \frac{k+1}{2}[2a_1 + kd]$

$= \frac{k+1}{2}[2a_1 + (k+1-1)d]$

$= S_{k+1}$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n ❑

ในกรณีที่เราต้องการหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต n พจน์แรก เมื่อทราบพจน์แรกและพจน์สุดท้ายของอนุกรมนั้น ก็สามารถหาผลบวกได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 2.1 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.2 เราได้ว่า $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$

แต่ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ($\because$ พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต)

ดังนั้น $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n ❑

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} + \ldots + 1$

วิธีทำ $d_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$d_2 = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$d_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}$

$\ldots \qquad \ldots$

$d_n = \frac{1}{12}$

แสดงว่าอนุกรมที่กำหนดให้นี้เป็นอนุกรมเลขคณิต ซึ่งมีพจน์แรก $(a_1) = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{12}$

ก่อนอื่นจะต้องหาจำนวนพจน์เสียก่อน

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

แทนค่า $a_1 = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{12}$, $a_n = 1$

จะได้ว่า $1 = \frac{1}{4} + (n-1)\frac{1}{12}$

$(n-1)\frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$n - 1 = 9$

$n = 10$

เพราะฉะนั้น โดยบทแทรก 2.1 จะได้ว่า $S_8 = \frac{10}{2}(\frac{1}{4} + 1) = \frac{25}{4}$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดลำดับ $a_n = 10 - 2n$ จงหาผลบวก 10 พจน์แรกที่เป็น<u>จำนวนเต็มลบ</u>

วิธีทำ เพราะว่าโจทย์ต้องการ $a_n < 0$

จะได้ว่า $10 - 2n < 0$ แก้อสมการได้ $n > 5$ แสดงว่า $n = 6$ เป็นพจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบ

ดังนั้น $n = 6;\ a_6 = 10 - 2(6) = -2$ และ $n = 15;\ a_{15} = 10 - 2(15) = -20$

เพราะฉะนั้น โดยบทแทรก 2.1 จึงได้ว่า $S_{10} = \frac{10}{2}((-2) + (-20)) = -110$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.6 ถ้า $\log_9 3,\ \log_9(3^x - 2),\ \log_9(3^x + 16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันในอนุกรมเลขคณิต และ S เป็นผลบวกของสี่พจน์แรกของอนุกรมนี้ แล้ว 3^S มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $\log_9 3,\ \log_9(3^x - 2),\ \log_9(3^x + 16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันในอนุกรมเลขคณิต

จะได้ว่า $d_1 = \log_9(3^x - 2) - \log_9 3 = \log_9\left(\frac{3^x - 2}{3}\right)$

และ $d_2 = \log_9(3^x + 16) - \log_9(3^x - 2) = \log_9\left(\frac{3^x + 16}{3^x - 2}\right)$

แต่ $d_1 = d_2$ ($\because$ ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต)

ดังนั้น $\log_9\left(\frac{3^x - 2}{3}\right) = \log_9\left(\frac{3^x + 16}{3^x - 2}\right)$

$$\frac{3^x - 2}{3} = \frac{3^x + 16}{3^x - 2}$$

$$(3^x - 2)^2 = 3(3^x + 16)$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) + 4 = 3(3^x) + 48$$

$$(3^x)^2 - 7(3^x) - 44 = 0$$

$$(3^x - 11)(3^x + 4) = 0$$

ดังนั้น $3^x - 11 = 0$ หรือ $3^x + 4 = 0$

จะได้ $3^x = 11$ ($\because 3^x + 4 = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง)

ดังนั้น $x = \log_3 11$

จะได้ $d_1 = \log_9\left(\frac{3^{\log_3 11} - 2}{3}\right) = \log_9\left(\frac{11 - 2}{3}\right) = \log_9 3$

จาก
$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{2}[2(\log_9 3) + (4 - 1)\log_9 3] \\ &= 10\log_9 3 \\ &= 10\left(\frac{1}{2}\log_3 3\right) \\ &= 5 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $3^S = 3^5 = 243$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7 + 15 + 23 + \ldots$ มีค่าเท่ากับ 217 แล้ว $\dfrac{2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{2n}}{2^8}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ พิจารณาผลบวกของอนุกรม $7 + 15 + 23 + \ldots$

โจทย์กำหนดให้ $S_n = 217$

จากสมการ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ แทนค่า $a_1 = 7,\ d = 8$

จะได้ว่า $217 = \frac{n}{2}[2(7) + (n-1)(8)]$

$= \frac{n}{2}(6 + 8n)$

แก้สมการได้ค่า $n = 7$ (ค่าลบไม่ใช้)

พิจารณาอนุกรม $2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{2n} = 2^7 + 2^8 + \ldots + 2^{14}$

ซึ่งเป็นผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตจำกัดที่มีผลบวก n พจน์แรกเท่ากับ $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$

แทนค่า $n = 14 - 7 + 1 = 8,\ a_1 = 2^7,\ r = 2$ จะได้ว่า

$$S_7 = \frac{2^7(1 - 2^8)}{1 - 2}$$

$$= \frac{128(1 - 256)}{-1}$$

$$= \frac{128(-255)}{-1}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{2n}}{2^8} = \dfrac{128(255)}{256} = 127.5$ ❑

แบบฝึกหัด 2.2

1. กำหนดให้ $a_n = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } n = 1, 2 \\ a_{n-2} + 2 \text{ เมื่อ } n = 3, 5, 7 \\ 2a_{n-2} \text{ เมื่อ } n = 4, 6, 8, \ldots \end{cases}$

   จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{101} a_i$

2. นายแดงนำเงินไปฝากธนาคารออมสินโดยฝากเดือนแรก 100 บาท เดือนต่อไปฝากเพิ่มขึ้นเดือนละ 5 บาท ทุกเดือน เมื่อครบ 2 ปี นายแดงนำเงินไปฝากทั้งหมดเท่าใด

3. จำนวนสมาชิกในเซต {100, 101, 102, …, 600} ซึ่งหารด้วย 8 หรือ 12 ลงตัวเท่ากับเท่าใด

2.3 อนุกรมเรขาคณิต

บทนิยาม 2.6

อนุกรมเรขาคณิต (geometrical series) คือ อนุกรมที่เกิดจากการบวกลำดับเรขาคณิตเข้าด้วยกัน

ตัวอย่างที่ 2.8 จงพิจารณาว่าอนุกรมที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นอนุกรมเรขาคณิตหรือไม่

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

วิธีทำ 1) เนื่องจากลำดับ $1, 2, 3, \ldots, 100$ ไม่ใช่ลำดับเรขาคณิต ดังนั้น $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ ไม่ใช่อนุกรมเรขาคณิต

2) เนื่องจากลำดับ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ดังนั้น $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

3) เนื่องจากลำดับ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ดังนั้น $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ❑

ทฤษฎีบท 2.3

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตใช้สัญลักษณ์คือ S_n หาได้จากสมการ

$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ เมื่อ a_1 คือพจน์แรกในลำดับเรขาคณิต, r คืออัตราส่วนร่วมในลำดับเรขาคณิต

พิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

<u>*ขั้นฐาน:*</u> เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า $S_1 = a_1$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

<u>*ขั้นอุปนัย:*</u> เมื่อ $n = k$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ สมมติว่า $S_k = \frac{a_1(1 - r^k)}{1 - r}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ

จะแสดงว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned} S_k + a_{k+1} &= \frac{a_1(1 - r^k)}{1 - r} + a_1 r^k \\ &= a_1\left(\frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k\right) \\ &= a_1\left[\frac{(1 - r^k) + r^k(1 - r)}{1 - r}\right] \end{aligned}$$

$$= a_1\left(\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}\right)$$

$$= S_{k+1}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ❑

อนึ่ง เนื่องจากอนุกรมเรขาคณิตหลายอนุกรมมีแนวโน้มที่จะลู่เข้าได้ หากพิจารณาจำนวนพจน์ที่มากพอ หรือกล่าวง่ายๆ คือ เป็นอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัด (infinite geometrical series) ก็มีสมการที่ใช้ในการหาผลบวกได้ด้วยดังนี้

ทฤษฎีบท 2.4 ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัด
สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ และ $|r| < 1$ โดยที่ r เป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัดจะได้ว่าผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัดแทนด้วยสัญลักษณ์ S_∞ โดยที่ $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.3 เราทราบว่า $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1 - r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 r^n}{1 - r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r}\left(\lim_{n\to\infty} r^n\right)$$

$$= \frac{a_1}{1 - r}$$ ($\because$ จากทฤษฎีบท 1.3 ข้อ 4(1) จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$) ❑

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_1 = 1,\ r = \frac{1}{3},\ n = 10$

จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $S_{10} = \dfrac{1\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]$

$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหาผลบวกของอนุกรม $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

วิธีทำ เราทราบว่า $a_1 = 1,\ r = \frac{1}{3}$

จากทฤษฎีบท 2.4 จึงได้ว่า $S_\infty = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.11 สำหรับ $x \in (-1, 1)$ ให้ $S(x)$ เป็นผลบวกของอนุกรม $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ จงหาค่าขอบเขตบนของเซต $A = \{\frac{1}{S(x)} \mid x \in \{-1, 1\}\}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

จะเห็นว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัดที่มีอัตราส่วนร่วม $r = -x$ ซึ่งมี $a_1 = 1 = x^0$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $S_\infty = \dfrac{1}{1 - (-x)} = \dfrac{1}{1 + x}$

นั่นคือ $\dfrac{1}{S(x)} = x + 1$

แต่โจทย์กำหนดว่า $x \in (-1, 1)$ แสดงว่า $-1 < x < 1$

จะได้ว่า $0 = -1 + 1 < x + 1 < 1 + 1 = 2$

หรือก็คือ $0 < x + 1 < 2$

แสดงว่าสำหรับ $\frac{1}{S(x)}$ ทุกๆ $x \in (-1, 1)$ จะมีค่าน้อยกว่า 2

เพราะฉะนั้น ขอบเขตบนของเซต A เท่ากับ 2 ❑

ตัวอย่างที่ 2.12 กำหนดให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$ และ $S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$

จำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $S - S_n = \frac{1}{9}(10^{-5})$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จาก $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$

$$= 10\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}$$

$$= 10\cdot\frac{\frac{1}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{10}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right] \quad \text{-----(2.3.1)}$$

จาก $S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$

$$= 10\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}$$

$$= 10\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= 10\cdot\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{10}{9}$$

พิจารณา $S - S_n = \frac{10}{9} - \frac{10}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right]$

$$= \frac{10}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$$

แต่ $S - S_n = \frac{1}{9}(10^{-5})$

จะได้ว่า $\frac{10}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^{n} = \frac{1}{9}(10^{-5})$

$$10^{1-n} = 10^{-5}$$

ดังนั้น $1 - n = -5$ หรือก็คือ $n = 6$ ❑

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ $S = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ และ $F(x) = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots,\ x \in S$ ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต S ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $F(a) \leq 1$ แล้ว $F(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
2. ถ้า $1 + \cos^2\theta + \cos^4\theta + \ldots = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ $\cos(\pi - 2\theta)\cdot\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$ เท่ากับเท่าใด

บทที่ 3
อนุกรมไม่จำกัด

3.1 อนุกรมไม่จำกัด

บทนิยาม 3.1
อนุกรมไม่จำกัด (infinite series) คือ อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

<u>**หมายเหตุ**</u> ในตำราบางเล่มอาจใช้คำว่า "อนุกรมอนันต์" แทนคำว่า "อนุกรมไม่จำกัด" ก็ได้

ตัวอย่างที่ 3.1 จงพิจารณาอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมไม่จำกัดหรือไม่

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$
2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$
3) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1{,}000$
4) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ เมื่อพิจารณาจากบทนิยาม 3.1 จะพบว่าอนุกรมที่เป็นอนุกรมไม่จำกัดได้แก่ อนุกรมที่กำหนดให้ในข้อ 1), 2) ส่วนข้อที่เหลือเป็นอนุกรมจำกัด ❑

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

วิธีทำ กำหนดให้ $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ เป็นผลบวกย่อย

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{4}$

เนื่องจากลำดับของผลบวกย่อยลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{4}$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาผลบวกของ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 - 1}$

วิธีทำ กำหนดให้ $S_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 - 1}$

$$= \frac{3}{7} + \frac{8}{26} + \frac{15}{63} + \ldots + \frac{n^2 - 1}{n^3 - 1} + \ldots$$

พิจารณาลำดับของผลบวกย่อย $\frac{3}{7}, \frac{3}{7} + \frac{8}{26}, \frac{3}{7} + \frac{8}{26} + \frac{15}{63}$ จะเห็นได้ชัดว่าลู่ออก

เพราะฉะนั้น หาผลบวกไม่ได้ ❑

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{0n^2 + 0n + 1}{n^2 + 7n + 12} = 0$ และ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^3 - 1}\right) = 0$ จะเห็นได้ว่า ลิมิตของลำดับทั้งสองเป็นศูนย์เหมือนกัน แต่อนุกรมไม่ได้ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน ดังนั้น เมื่อลิมิตเท่ากับศูนย์ จะไม่สามารถสรุปได้ว่าอนุกรมนั้นลู่เข้าหรือลู่ออก แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าเราทราบว่า อนุกรมใดลู่เข้าแล้วสามารถสรุปได้ทันทีว่าลิมิตเท่ากับ 0 เสมอ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า (converges) แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

พิสูจน์ สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ดังนั้นให้ $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

พิจารณาลำดับของผลบวกย่อย

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + a_n$$

ดังนั้น $a_n = S_n - S_{n-1}$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$ -----(3.1.1)

เนื่องจากเมื่อ $n \to \infty$ เราทราบว่า $S_n \approx S_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.4 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ลู่เข้า และแสดงว่า $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ลู่เข้าสู่ศูนย์

วิธีทำ กำหนดให้ $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

แสดงว่า ลำดับของผลบวกย่อยลู่เข้า และได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้า

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = 0$

พิจารณา $\frac{1}{n(n+1)}$

แยกเศษส่วนย่อยโดยให้ $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$= \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$

$= \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $A + B = 0$ -----(3.1.2)

และ $A = 1$ -----(3.1.3)

จะได้ $A = 1$ และ $B = -1$

ดังนั้น $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \ldots$

วิธีทำ กำหนดให้ $S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \ldots$

$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากลิมิตของลำดับผลบวกย่อยลู่เข้า จึงได้ว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \ldots = \frac{1}{2}$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาผลบวกของอนุกรม $1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$

วิธีทำ ให้ $S = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$ -----(3.1.4)

คูณตลอดสมการ (3.1.4) ด้วย 2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
2S &= 2(1 \cdot \tfrac{1}{3}) + 2(\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{5}) + 2(\tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{7}) + \ldots \\
&= (1 - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}) + \ldots + (\tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n+1}) \\
&= 1 - \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}
$$

จะได้ $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

นั่นคือ ผลบวกของอนุกรม $1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$ เท่ากับ $\frac{1}{2}$ ❑

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาผลบวกของอนุกรมไม่จำกัดดังต่อไปนี้ (ถ้ามี)
   1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \ldots$
   2) $1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \ldots$
   3) $1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} \cdot \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^3} \cdot \frac{4}{4^4} + \ldots$
   4) $\frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{9^2} + \ldots$
2. สำหรับอนุกรมในข้อ 1 จงแสดงว่าอนุกรมที่ลู่เข้ามี $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
3. จงแสดงว่าถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $L \neq 0$ แล้ว $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ଔ ଔ ଔ ଔ ଔ ଔ

3.2 การลู่เข้าของอนุกรมพี และอนุกรมฮาร์มอนิก

บทนิยาม 3.2

1) อนุกรมฮาร์มอนิก (Harmonic series) คือ อนุกรมที่ได้จากการนำลำดับฮาร์มอนิกมาบวกกัน กล่าวคือ อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

2) อนุกรมพี (P – series) คือ อนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 3.7 จงพิจารณาว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ข้อใดเป็นอนุกรมฮาร์มอนิก อนุกรมพี หรือไม่ใช่ทั้งสอง

1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^p} + \dots$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

2) $\frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^3} + \dots + \frac{1}{(2n)^p} + \dots$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

3) $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ 1) เป็นอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัด ที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\frac{1}{n+1}$

2) เป็นอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัด ที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\frac{1}{2n}$

3) เป็นอนุกรมพี (p – series) ที่มี $p = 3$ ❑

ทฤษฎีบท 3.2 การลู่เข้าของอนุกรมพี

กำหนดอนุกรม $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว

1) อนุกรมพีลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p > 1$

2) อนุกรมพีลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $p \leq 1$

พิสูจน์ กำหนดให้ $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ เป็นอนุกรม โดยที่ p เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 1) เท่านั้น ส่วนข้อ 2) ละเอาไว้ให้ผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

($\Rightarrow$) สมมติว่าอนุกรมลู่เข้า

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ -----(3.2.1)

จะเห็นได้ชัดว่าสมการ (3.2.1) จะเป็นจริงเมื่อ $p > 1$ เท่านั้น

($\Leftarrow$) สมมติว่า $p > 1$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ให้ $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ จะแสดงว่า S_n หาค่าได้โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า $S_1 = \frac{1}{1^p} = 1$ จริง

เมื่อ $n = k$ สมมติว่า $S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ จะแสดงว่า S_{k+1} เป็นจริง

จาก $S_k + a_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} + \frac{1}{(k+1)^p}$

$= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{k^p} + \frac{1}{(k+1)^p}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^p}$

$= S_{k+1}$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

และได้ว่า S_n หาค่าได้ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า ❑

สำหรับการลู่เข้าของอนุกรมฮาร์มอนิกนั้น จะเห็นได้ว่าอนุกรมฮาร์มอนิกก็คืออนุกรมพีซึ่งมี $p = 1$ นั่นเอง และก็จะได้ตามมาว่าอนุกรมฮาร์มอนิกเป็นอนุกรมที่ลู่ออกเสมอ ผู้เขียนจึงจะไม่ขอกล่าวถึงอีก

แบบฝึกหัด 3.2

จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2 (2)

3.3 การเขียนจำนวนตรรกยะเป็นผลบวกของอนุกรมไม่จำกัด

สมมติให้ S = 0.99… เราสามารถเขียนจำนวนทางขวามือให้อยู่ในรูปของอนุกรมไม่จำกัดได้ดังต่อไปนี้คือ $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$

จะเห็นได้ว่าอนุกรมไม่จำกัดดังกล่าวเป็นอนุกรมเรขาคณิตไม่จำกัด ซึ่งเราได้เคยพิจารณากันมาแล้วในบทที่ผ่านมา โดยสมบัติการเท่ากันเราจะได้ว่า

$$S = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$$

$$= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$= 1$$

แสดงว่า 0.99… = 1 นั่นเอง และเป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนจริงเป็นผลบวกของอนุกรมไม่จำกัดตามต้องการ ทั้งนี้ เราอาจพิสูจน์ได้อีกแนวหนึ่งดังต่อไปนี้

$$S = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots \quad \text{-----(3.3.1)}$$

คูณตลอดสมการ (3.5.1) ด้วย $\frac{1}{10}$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{10}S = \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \ldots \quad \text{-----(3.3.2)}$$

แทนค่าจากสมการ (3.3.2) ลงในสมการ (3.3.1) จะได้ว่า

$$S = \frac{9}{10} + \frac{1}{10}S$$

$$S - \frac{1}{10}S = \frac{9}{10}$$

$$\frac{9}{10}S = \frac{9}{10}$$ จะได้ว่า S = 1

ตัวอย่างที่ 3. 8 จงหาค่าของ 0.2323…

วิธีทำ กำหนดให้ S = 0.2323…

จะได้ว่า $S = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \ldots$

$$= \left(\frac{2}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^5} + \ldots\right) + \left(\frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{100}} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{20}{99} + \frac{3}{99} = \frac{23}{99}$$ ❑

<u>หมายเหตุ</u> จากตัวอย่างที่ 3.8 เราอาจมอง 0.2323… ในรูป 0.<u>23</u> <u>23</u> … กล่าวคือมอง 23 เป็น 1 กลุ่ม เพื่อความสะดวกในการคำนวณก็ได้ ซึ่งก็จะได้ผลลัพธ์ไม่แตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาค่าของ 0.455455455…

วิธีทำ กำหนดให้ S = 0.455455…

จะได้ว่า $S = \frac{455}{10^3} + \frac{455}{10^6} + \frac{455}{10^9} + \ldots$

$$= \frac{\frac{455}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}}$$

$$= \frac{455}{999}$$

❑

แบบฝึกหัด 3.3

จงหาค่าต่อไปนี้

1. 0.11…
2. 0.4747…
3. 0.993993993…
4. 0.12131415…

บรรณานุกรม

ชมรมบัณฑิตแนะแนว. **เฉลยข้อสอบ ENT' มีนาคม 44**. กรุงเทพฯ : ชมรมบัณฑิตแนะแนว, 2544.

___________________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 45**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2545.

___________________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 46**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2546.

___________________. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 48**. กรุงเทพฯ : รุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์, 2548.

มานัส บุญยัง. **การวิเคราะห์เชิงจริงเบื้องต้น 1**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2545.

สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. **ภินทนคณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : ด่านสุทธาการพิมพ์, 2546.

สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ. **แคลคูลัสขั้นสูง 1**. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2547.

ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และคณะ. **เอกสารประกอบคำบรรยายวิชาคณิตศาสตร์ 1 ในโครงการแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ 2004**. กรุงเทพฯ : ชมรมบัณฑิตแนะแนว, 2547.

สุรศักดิ์ วัฒเนสก์ และคณะ. **เฉลย Ent' ตุลาคม 43 แผนกวิทย์**. พิมพ์ครั้งที่ 1. เชียงใหม่ : ประชากรธุรกิจ, 2543.

Bibliography

Larson, Lee, Prof., Ph.D. **Notes on Real Analysis**. Louisville, 1998.