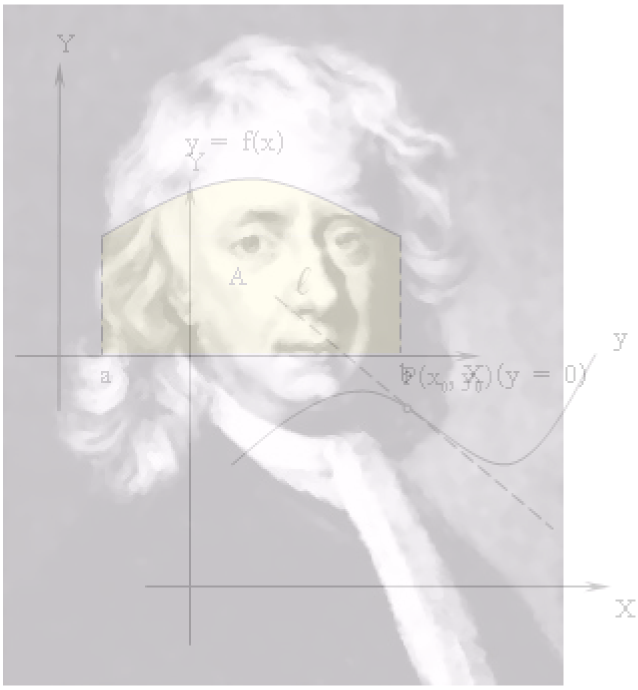
แคลคูลัสเบื้องต้น
(Introduction to Calculus)



หนังสือเรียนออนไลน์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ชุด “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” เล่มที่ 11

สัทธา   หาญวงศ์ฤทธิ์

คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 2

"การปรับปรุงในครั้งนี้ผู้เขียนได้เพิ่มเติมแบบฝึกหัดท้ายหัวข้อต่างๆ ในบทที่ 2 และบทที่ 3 รวมทั้งมีการแก้ไขคำอธิบายเนื้อหาในบทที่ 4 นอกจากนั้นยังได้มีการแก้ไขคำผิด และแก้ไขคำอธิบายเนื้อหาให้มีความชัดเจนและถูกต้องตามหลักวิชามากยิ่งขึ้น

ผู้เขียนหวังว่าการแก้ไขปรับปรุงในครั้งนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านบ้างพอสมควร หากผู้อ่านมีข้อเสนอแนะเกี่ยวกับหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้ก็สามารถติดต่อกับผู้เขียนตามที่อยู่ที่ให้ไว้แล้วบนเว็บไซต์"

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

25 กันยายน พ.ศ. 2552

คำนำ

“หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นเล่มที่ 11 ในจำนวนทั้งหมด 15 เล่ม ซึ่งได้เรียบเรียงขึ้นโดยมีเนื้อหาเกี่ยวกับแคลคูลัสเบื้องต้น ได้แก่ แนวคิดเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว แนวคิดเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยบางตัวที่ควรทราบ การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้กฎของโลปิตาล การหาอินทิกรัลของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เทคนิคการอินทิเกรตที่น่าสนใจ และในบทสุดท้ายจะกล่าวเกี่ยวกับการประยุกต์ของแคลคูลัส เช่น การหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันตัวแปรเดียวภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ และการหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้จะยังประโยชน์ให้แก่ผู้อ่านบ้างไม่มากก็น้อย”

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

20 มีนาคม พ.ศ. 2549

คำนำในการปรับปรุงครั้งที่ 1

“การปรับปรุงหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นครั้งแรก โดยผู้เขียนได้เพิ่มเติมคำอธิบายและตัวอย่างการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้กฎของโลปิตาล ซึ่งอยู่ในหัวข้อ 2.5

หวังว่าการปรับปรุงครั้งนี้จะมีประโยชน์เพิ่มขึ้นแก่ผู้อ่านบ้างตามสมควร”

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

16 พฤษภาคม พ.ศ. 2549

สารบัญ

บทที่ 1
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f(x) = x^2$ พิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 1$ และที่ x ใกล้เคียงกับ $x = 1$ จากตารางต่อไปนี้

$x \longrightarrow 1^-$

x	f(x)
0.9	0.81
0.91	0.8281
0.92	0.8464
0.93	0.8649
0.94	0.8836
0.95	0.9025
0.96	0.9216
0.97	0.9409
0.98	0.9604
0.99	0.9801
1.00	1.0000

x	f(x)
1.00	1.0000
1.01	1.0201
1.02	1.0404
1.03	1.0609
1.04	1.0816
1.05	1.1025
1.06	1.1236
1.07	1.1449
1.08	1.1664
1.09	1.1881
1.10	1.2100

$x \longrightarrow 1^+$

จากตารางซ้ายจะเห็นว่า เมื่อค่า x เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ $x = 1$ ค่าของฟังก์ชัน f หรือ f(x) จะเข้าใกล้ 1 ด้วย กรณีนี้เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$ และในทำนองเดียวกัน สำหรับตารางขวาเมื่อ x ลดลงเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ $x = 1$ แล้วค่าของ f(x) จะเข้าใกล้ 1 ด้วยเช่นกัน ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$

นิพจน์ $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2$ อ่านว่า “ลิมิตของ x^2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย” และสำหรับนิพจน์ $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2$ อ่านว่า “ลิมิตของ x^2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา”

ในกรณีทั่วๆ ไป ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริงแล้ว เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ $x = a$ มีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

จากที่ได้พิจารณามาทั้งหมด เราสามารถสรุปมาได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนเซตของจำนวนจริง จะกล่าวว่า f มีลิมิตทางซ้ายที่ x = a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ และในทำนองเดียวกัน f จะมีลิมิตทางขวาที่ x = a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ และถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ สำหรับจำนวนจริง L แล้วจะกล่าวว่า f มีลิมิตที่ x = a มีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

<u>ข้อสังเกต</u> สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงแล้ว สามารถหาลิมิตได้เสมอ

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ จงหา

1) ลิมิตทางซ้ายของ f ที่ x = –1
2) ลิมิตทางขวาของ f ที่ x = –1
3) ลิมิตของ f ที่ x = –1

วิธีทำ 1)
$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \left(\frac{1}{3x+1}\right)$$
$$= \lim_{x \to (-1)^-} \left(\frac{1}{3(-1)+1}\right)$$
$$= \lim_{x \to (-1)^-} \left(\frac{1}{-2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}$$

2)
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \left(\frac{1}{3x+1}\right)$$
$$= \lim_{x \to (-1)^+} \left(\frac{1}{3(-1)+1}\right)$$
$$= \lim_{x \to (-1)^+} \left(\frac{1}{-2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}$$

3) เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\frac{1}{3x+1}\right) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\frac{1}{3x+1}\right) = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1}{3x+1}\right) = -\frac{1}{2}$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหา

1) ลิมิตทางซ้ายของ f ที่ $x = 0$

2) ลิมิตทางขวาของ f ที่ $x = 0$

3) ลิมิตของ f ที่ $x = 0$

วิธีทำ 1) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$

จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่าได้ เนื่องจากภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์เป็นจำนวนจริงลบซึ่งไม่นิยาม เพราะฉะนั้น ไม่มีลิมิตทางซ้ายของ f ที่ $x = 0$

2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{0}$

$= 0$

3) เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ ไม่มี ❑

ในทางวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง (Real Analysis) เรานิยาม $\lim_{x\to a} f(x)$ ในเทอมของ "ε" (epsilon) และ "δ" (delta) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2

กำหนดให้ ε และ δ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

บทนิยามข้างต้น เรานำไปใช้ในการตรวจสอบว่าลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นเป็นจริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 0} (3x - 1) = -1$

วิธีทำ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ จะเห็นว่า $\delta > 0$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ สมมติว่า $0 < |x - 0| < \delta$

จาก $|x - 0| < \delta$ จะได้ว่า $x = x - 0 < \delta$

ดังนั้น $3x = |(3x - 1) + 1| = |f(x) - L| < 3\delta = \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} (3x - 1) = -1$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.4 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x - 1}\right) = -1$

วิธีทำ ก่อนอื่นเราจะต้องหาเสียก่อนว่าจะเลือก δ ได้อย่างไรโดยการคิดย้อนจาก $\left|\frac{1}{x - 1} + 1\right| < \varepsilon$

จาก
$$\left|\frac{1}{x - 1} + 1\right| = \left|\frac{1 + (x - 1)}{x - 1}\right| = \left|\frac{x}{x - 1}\right|$$

เนื่องจาก $|x| = |x - 0| < \delta$ ดังนั้น ถ้าเราหาได้ว่า $\frac{1}{|x - 1|} < m$ ก็จะได้ตามมาว่า

$$\left|\frac{1}{x - 1} + 1\right| = \frac{|x|}{|x - 1|} < m\delta$$

นั่นคือ ถ้าเลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{m}$ ก็แสดงว่าสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์นั้นเป็นจริง

เนื่องจาก $\delta > 0$ เลือก $0 < \delta \le \frac{1}{3}$ จะได้ว่า $|x - 0| < \delta \le \frac{1}{3}$ หรือก็คือ $|x - 0| < \frac{1}{3}$

จะได้ว่า $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

ดังนั้น $-\frac{4}{3} < x - 1 < -\frac{2}{3}$ หรือก็คือ $|x - 1| > \frac{2}{3}$ นั่นคือ $\frac{1}{|x - 1|} < \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $m = \frac{3}{2}$ จึงได้ว่า $\delta \le \frac{2}{3}\varepsilon$ ต่อไปนี้จะแสดงการพิสูจน์

สมมติให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\varepsilon\right)$ ดังนั้น $\delta \le \frac{2}{3}\varepsilon$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $0 < |x - 0| < \delta$

จาก
$$\left|\frac{1}{x - 1} + 1\right| = \left|\frac{1 + (x - 1)}{x - 1}\right| = \left|\frac{x}{x - 1}\right| < \frac{3}{2}\delta \le \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\varepsilon\right) = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x - 1}\right) = -1$ ❑

เช่นเดียวกับลิมิตของลำดับ ถ้าฟังก์ชันใดๆ ก็ตามที่หาลิมิตได้แล้วลิมิตของฟังก์ชันจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

พิสูจน์ สมมติว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$

ต้องการแสดงว่า $L_1 = L_2$ หรือก็คือต้องการแสดงว่า $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

จาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ ดังนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งสำหรับทุกๆ จำนวนจริง x ถ้า $0 < |x-a| < \delta_1$

แล้ว $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ -----(1.1.1)

ในทำนองเดียวกัน จาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ ดังนั้น จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งสำหรับทุกๆ จำนวนจริง x

ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ -----(1.1.2)

เลือก $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ดังนั้น $\delta \le \delta_1$ และ $\delta \le \delta_2$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= \left|(L_1 - f(a+\tfrac{\delta}{2})) + (f(a+\tfrac{\delta}{2}) - L_2)\right| \\ &\le \left|L_1 - f(a+\tfrac{\delta}{2})\right| + \left|f(a+\tfrac{\delta}{2}) - L_2\right| \\ &= \left|f(a+\tfrac{\delta}{2}) - L_1\right| + \left|f(a+\tfrac{\delta}{2}) - L_2\right| \quad \text{-----(1.1.3)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left|(a+\frac{\delta}{2}) - a\right| = \frac{\delta}{2} \le \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$ และ $\left|(a+\frac{\delta}{2}) - a\right| = \frac{\delta}{2} \le \frac{\delta_2}{2} < \delta_2$

ดังนั้น จาก (1.1.1) และ (1.1.2) จะได้ว่า $\left|f(a+\frac{\delta}{2}) - L_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $\left|f(a+\frac{\delta}{2}) - L_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

แทนค่าใน (1.1.3) จะได้ $|L_1 - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ดังนั้น เราได้พิสูจน์แล้วว่า $L_1 = L_2$ ตามต้องการ ❑

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = \dfrac{1}{2}$
2. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^4-1}\right)$ พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบของท่านด้วย

1.2 สมบัติบางประการเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

หัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทำความเข้าใจลักษณะและรายละเอียดเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันมาแล้ว สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณารายละเอียดเกี่ยวกับสมบัติของลิมิตของฟังก์ชัน โดยจากหัวข้อเรื่องพีชคณิตของฟังก์ชัน (หนังสือเรียนออนไลน์เล่มที่ 5 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน) เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้โดยการนำฟังก์ชันย่อยๆ มาดำเนินการบวก ลบ คูณ หรือหารกัน ซึ่งในเรื่องลิมิตของฟังก์ชันก็เป็นไปในทำนองเดียวกับพีชคณิตของฟังก์ชัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2
กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันบนเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = L + M$
2) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) - g(x)\right] = L - M$
3) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\cdot g(x)\right] = L \cdot M$
4) $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$

พิสูจน์ 1) จากบทนิยาม 1.1 จะแสดงว่า

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f\ [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |[f(x)+g(x)]-[L+M]| < \varepsilon]$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ จะได้ว่ามี $\delta_1 > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in D_f$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ แล้วจะได้ว่า $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ จะได้ว่ามี $\delta_2 > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in D_g$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ แล้วจะได้ว่า $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ดังนั้น $\delta > 0$

ถ้าให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $x \in D_{f\cap g}$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}|(f(x)-L)+(g(x)-M)| &< |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

2) พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

3) พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

4) พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด ❑

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3$ และ $g(x) = \frac{1}{x+2}$ จงหา

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left[f(x) + g(x)\right]$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \left[f(x) - g(x)\right]$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \left[f(x) \cdot g(x)\right]$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$

วิธีทำ

1)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left[f(x) + g(x)\right] &= \lim_{x \to 0} \left[\left(x^2 + 3\right) + \left(\frac{1}{x+2}\right)\right] \\
&= \lim_{x \to 0} \left(x^2 + 3\right) + \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x+2}\right) \\
&= (0 + 3) + \left(\frac{1}{0+2}\right) \\
&= 3 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left[f(x) - g(x)\right] &= \lim_{x \to 0} \left[\left(x^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{x+2}\right)\right] \\
&= \lim_{x \to 0} \left(x^2 + 3\right) - \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x+2}\right) \\
&= (0 + 3) - \left(\frac{1}{0+2}\right) \\
&= 3 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] &= \lim_{x \to 0} \left[\left(x^2 + 3\right) \cdot \left(\frac{1}{x+2}\right)\right] \\
&= \lim_{x \to 0} \left(x^2 + 3\right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x+2}\right) \\
&= (0 + 3) \cdot \left(\frac{1}{0+2}\right) \\
&= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 3}{\frac{1}{x+2}}\right) \\
&= \lim_{x \to 0} (x^2 + 3) \cdot \lim_{x \to 0} (x + 2) \\
&= (0 + 3) \cdot (0 + 2) \\
&= 3 \cdot 2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

❑

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2 ข้อที่ยังไม่ได้พิสูจน์

2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+8}{x+2}}$, $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^4-1}}$ จงหา

    1) $\lim\limits_{x \to 1} \left[f(x) + g(x) \right]$

    2) $\lim\limits_{x \to 1} \left[f(x) - g(x) \right]$

    3) $\lim\limits_{x \to 1} \left[f(x) \cdot g(x) \right]$

    4) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right]$

3. กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันโดยที่ $R_f \cap D_g \neq \phi$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว

    1) จงหา $\lim\limits_{x \to a} (gof(x))$ เมื่อ $a \in R$

    2) จงพิสูจน์คำตอบของท่านในข้อ 1)

4. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $a, c \in R$ จงแสดงว่า

    1) $\lim\limits_{x \to a} c = c$

    2) $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

1.3 ลิมิตที่ย่างเข้าสู่อนันต์

บทนิยาม 1.3

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ x ย่างเข้าสู่อนันต์ ได้แก่รูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังนี้

1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

อนึ่ง สำหรับลิมิตที่ย่างเข้าสู่อนันต์ของฟังก์ชันนั้นไม่จำเป็นต้องหาค่าได้เสมอไป หากไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ เราจะกล่าวว่าลิมิตนั้นลู่ออก (diverge) และในทางกลับกันถ้าหาค่าลิมิตได้เท่ากับจำนวนจริงค่าหนึ่งแล้ว เราจะกล่าวว่าลิมิตนั้นลู่เข้า (converge)

ต่อไปนี้เป็นลิมิตของฟังก์ชันบางชนิดที่ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งนำไปใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันอื่นๆ ได้ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$

ทฤษฎีบท 1.3 เราจะนำไปใช้งานโดยขอละการพิสูจน์ ผู้อ่านที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากตำราเกี่ยวกับแคลคูลัสชั้นสูงซึ่งเป็นรายวิชาในระดับอุดมศึกษา

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+5}\right)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+5}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+0}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

❑

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4+x^3-x-1}\right)$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4+x^3-x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^4\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}\right]$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right) - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \frac{0+0-0-0}{1+0-0-0} = 0 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 + 4}\right)$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 + 4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^4})}{x^4(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4})}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^4}}{\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4}}\right]$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right) + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^4}\right)}$$

$$= \frac{1-0+0}{0+0}$$

$$= \frac{1}{0} = \infty$$

ดังนั้น ลิมิตลู่ออกไม่สามารถหาค่าได้ $\square$

แบบฝึกหัด 1.3

จงหาลิมิตย่างเข้าสู่อนันต์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4 - 16}{x^4 - 4}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}\right)$

1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.4

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่อง (f is continuous) ที่ x = a ก็ต่อเมื่อ

1) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ
2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 6$ จงแสดงว่า f มีความต่อเนื่องที่ x = 2

วิธีทำ 1) เนื่องจาก

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 6) = \lim_{x \to 2} (2^2 - 6) = \lim_{x \to 2} (-2) = -2$$

2) เนื่องจาก $f(2) = 2^2 - 6 = 4 - 6 = -2$

จาก 1) และ 2) และโดยบทนิยาม 1.3 สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องที่ x = 2 ตามต้องการ ❑

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงแสดงว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ x = 0

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f จึงไม่มีลิมิต

โดยบทนิยาม 1.4 จึงสรุปได้ว่า f ที่กำหนดให้ไม่มีความต่อเนื่องที่ x = 0 ❑

อนึ่ง ในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง ความต่อเนื่องของฟังก์ชันมีนิยามในเทอมของ ε และ δ ดังนี้

บทนิยาม 1.5

ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x = a เมื่อ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f\ [|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 1.5 จะเห็นว่าคล้ายกับบทนิยาม 1.2 ในเรื่องลิมิตของฟังก์ชันแต่มีข้อแตกต่างตรงเงื่อนไข "$0 < |x - a| < \delta$" ซึ่งในเรื่อความต่อเนื่องของฟังก์ชันไม่ต้องพิจารณาเงื่อนไข $0 < |x - a|$ เพราะเราต้องพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ที่ x = a ด้วยนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1.11 จงแสดงว่า $f(x) = \frac{1}{x}$ มีความต่อเนื่องที่ $x = -1$

วิธีทำ จะแสดงว่า $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \; [|x+1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}+1\right| < \varepsilon]$

พิจารณา $\left|\frac{1}{x}+1\right| < \varepsilon$

จะได้ว่า $\left|\frac{1}{x}+1\right| = \left|\frac{1+x}{x}\right| = \frac{|x+1|}{|x|} < \varepsilon$

แต่จาก $|x+1| < \delta$ ก็แสดงว่าถ้าเราหาได้ว่า $\frac{1}{|x|} < m$ ก็จะได้ว่า $\frac{|x+1|}{|x|} < m\delta$

ดังนั้น ถ้าเราเลือกให้ $\delta \le \frac{\varepsilon}{m}$ ก็จะได้ว่าสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์นั้นเป็นจริง

จาก $\delta > 0$ เลือก $0 < \delta \le \frac{1}{4}$

จะได้ว่า $|x+1| < \frac{1}{4}$ หรือก็คือ $-\frac{1}{4} < x+1 < \frac{1}{4}$

ดังนั้น $-\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $|x| > \frac{3}{4}$ หรือก็คือ $\frac{1}{|x|} < \frac{4}{3}$

ดังนั้น ถ้าให้ $m = \frac{4}{3}$ ก็จะได้ว่า $\delta \le \frac{3}{4}\varepsilon$ ต่อไปนี้จะแสดงการพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\varepsilon)$ ดังนั้น $\delta \le \frac{3}{4}\varepsilon$

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ สมมติว่า $|x+1| < \delta$

$$
\begin{aligned}
\text{พิจารณา}\left|\frac{1}{x}+1\right| &= \left|\frac{1+x}{x}\right| = \frac{|x+1|}{|x|} \\
&= \frac{|x+1|}{|x|} \\
&< \frac{4}{3}\delta \le \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เราได้พิสูจน์แล้วว่า $f(x) = \frac{1}{x}$ มีความต่อเนื่องที่ $x = -1$ ❑

ขอส่งท้ายหัวข้อนี้ด้วยบทนิยามเกี่ยวกับความต่อเนื่องบนเซตที่กำหนดให้ดังนี้

บทนิยาม 1.6
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $I \subseteq R$ แล้ว f มีความต่อเนื่องบนเซต I เมื่อ f มีความต่อเนื่องสำหรับทุกสมาชิก $x \in I$

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3+8}{x+2}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนเซต $[-5, 5]$ หรือไม่

วิธีทำ จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ จะเห็นได้ชัดว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = -2$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 1.6 สามารถสรุปได้ว่า f ที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องบนเซต $[-5, 5]$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^2 - 43}{a+1} & \text{สำหรับ } x < 0 \\ \dfrac{2x - 3}{x^2 + 1} & \text{สำหรับ } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 5x + 2} & \text{สำหรับ } x > 1 \end{cases}$

โดยที่ $a > 0$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ จงหาค่า a

วิธีทำ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x = 0$

1) เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{a^2 - 43}{a + 1}$

และ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{2x - 3}{x^2 + 1}\right)$

2) จาก $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + 1}$ จะได้ว่า $f(0) = \dfrac{2(0) - 3}{0^2 + 1} = -3$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{a^2 - 43}{a + 1} = -3$

ดังนั้น $a^2 - 43 = -3(a + 1)$

$a^2 - 43 + 3a + 3 = 0$

$a^2 + 3a - 40 = 0$

$(a + 8)(a - 5) = 0$

$a = -8, 5$ แต่โจทย์กำหนด $a > 0$ ดังนั้น $a = 5$ ❑

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงแสดงว่า $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$
2. จงแสดงว่า $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 4}}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$
3. จงวาดกราฟพอสังเขปของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 1.13

บทที่ 2
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] แล้วอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f'

โดยที่ $f' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

<u>**หมายเหตุ**</u>

1) ตำราบางเล่มอาจแทน **"อนุพันธ์ของฟังก์ชัน"** ด้วยสัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ ส่วนหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้จะใช้ทั้งสองอย่างสลับกันไป ขึ้นอยู่กับหัวข้อที่กำลังพิจารณาอยู่

2) อนุพันธ์ของฟังก์ชันตามบทนิยาม 2.1 เป็นการหาอนุพันธ์ทั่วๆ ไป ในกรณีที่ต้องการหาอนุพันธ์ที่จุด $x = x_0$ แล้วอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x_0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

3) อันดับหรือดีกรีของอนุพันธ์ หมายถึง จำนวนครั้งในการหาอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา

1) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

2) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = 2$

วิธีทำ 1) จาก $f(x) = x^2$

โดยบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x) + \lim_{h \to 0} h$$

$$= 2x$$

ดังนั้น $f'(x) = 2x$

2) จาก $f'(x) = 2x$ แทนค่า $x = 2$ จะได้ว่า $f'(2) = 2(2) = 4$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h)^2+1}{(x+h)-1} - \dfrac{x^2+1}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{[(x+h)^2+1](x-1)}{[(x+h)-1](x-1)} - \dfrac{(x^2+1)[(x+h-1)]}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{[x(x+h)^2+x-(x+h)^2-1]}{[(x+h)-1](x-1)} - \dfrac{[x(x^2+1)+h(x^2+1)-(x^2+1)]}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x^3+2x^2h+xh^2+x-x^2-2xh-h^2-1}{[(x+h)-1](x-1)} - \dfrac{(x^3+x+hx^2+h-x^2-1)}{(x-1)[(x+h)-1]}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x^3+2x^2h+xh^2+x-x^2-2xh-h^2-1)-(x^3+x+hx^2+h-x^2-1)}{[(x+h)-1](x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h(x^2+xh-2x-h-1)}{[(x+h)-1](x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+xh-2x-h-1}{[(x+h)-1](x-1)}$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x-1)} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $f(x) = e^x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = e^x$ จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} \qquad \text{-----(2.1.1)}$$

จากหนังสือเรียนออนไลน์เล่มที่ 3 ระบบจำนวนจริง เราสามารถเขียนฟังก์ชัน e^x ในรูปของอนุกรมแมคคลอรินได้คือ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ จะได้ว่า $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots$

แทนค่า e^x และ e^h ในสมการ (2.1.1) ได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)[(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots) - 1]}{h} \quad \text{-----(2.1.2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \cdot \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\right) \quad \text{-----(2.1.3)}$$

เนื่องจาก $\lim_{h \to 0} \left(\frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\right) = 0$ ดังนั้น สมการ (2.1.3) จึงเหลือ

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \cdot \lim_{h \to 0} 1$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x$$

❑

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sin x$ จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin (x + h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \sin x \left(\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= (\sin x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$ ❑

<u>หมายเหตุ</u> $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) = 0$ และ $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) = 1$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงแสดงว่า $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) = 0$
2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) = 1$
3. จงหาค่าของ $f'(x)$ สำหรับฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้บทนิยาม 2.1
    1) $f(x) = \cos x$
    2) $f(x) = \frac{1}{x}$
    3) $f(x) = \sqrt{x}$
    4) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$
    5) $f(x) = \ell n\, x$

2.2 การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่า การหาอนุพันธ์โดยใช้ลิมิตนั้นอาจไม่สะดวกจึงมีการสร้างสูตรสำเร็จเพื่อใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.2.1 พีชคณิตของอนุพันธ์

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหาร ใช้สูตรที่สามารถพิสูจน์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1

กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2) $\frac{d}{dx}(c \cdot f) = c \cdot \frac{df}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}(f-g) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f \cdot \frac{dg}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \frac{df}{dx} - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}$ และ $g \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

7) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

8) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ และ $x \neq 0$

พิสูจน์ ในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 1) – 5) ส่วนข้อที่เหลือผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

1) จากบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(c \cdot f) &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot \frac{df}{dx} \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f+g) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

4) $$\frac{d}{dx}(f-g) = \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h) - (f-g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

5) $$\frac{d}{dx}(f\cdot g) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x)] - [f(x)\cdot g(x) - f(x+h)\cdot g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] - g(x)[f(x) - f(x+h)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x) - f(x+h)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x) = f\cdot\frac{dg}{dx} + g\cdot\frac{df}{dx}$$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ และ $g(x) = x^2 + 4$ จงหาค่าของ $\frac{d}{dx}(f\cdot g)$

วิธีทำ จาก $\frac{d}{dx}(f\cdot g) = f\cdot\frac{dg}{dx} + g\cdot\frac{df}{dx}$ -----(1)

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+4) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2$$

และ $$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 - 3x - 4)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 3x^2 - 4x - 3$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{d}{dx}(f\cdot g) = (x^3 - 2x^2 - 3x + 4)\cdot(2) + (x^2+4)\cdot(3x^2 - 4x - 3)$$

$$= (2x^3 - 4x^2 - 6x + 8) + (3x^4 + 12x^2 - 4x^3 - 16x - 3x^2 - 12)$$
$$= (2x^3 - 4x^2 - 6x + 8) + (3x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 16x - 12)$$
$$= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 22x - 4 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้ $f(x) = e^x \cdot \cos x$ จงหา f'

วิธีทำ ให้ $g(x) = e^x$ และ $h(x) = \cos x$ ดังนั้น $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

จะได้ $f'(x) = (g \cdot h)'(x)$
$$= g \cdot h'(x) + h \cdot g'(x)$$
$$= e^x \cdot (-\sin x) + (\cos x) \cdot e^x$$
$$= -e^x \sin x + e^x \cos x \qquad \square$$

แบบฝึกหัด 2.2 ก

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $f(x) = xe^x$
   2) $f(x) = \cos x + \operatorname{cosec} x$
   3) $f(x) = e^x \sin x - \cos x$
2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ณ $x = 0$ (ถ้าหาค่าได้) ที่กำหนดให้ในข้อ 1
3. กำหนดให้ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ เมื่อ $|x| < 1$ จงหา f' ที่ x ใดๆ และ f' ที่ $x = \frac{1}{4}$

2.2.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Function) หมายถึง ฟังก์ชันใดๆ ก็ตามที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพหุนาม ตัวอย่างเช่น e^x, $\sin x$, $\ell n\, x$, $\cosh x$ เป็นต้น ดังนั้น ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ ที่มีลักษณะดังกล่าว

ทฤษฎีบท 2.2

1) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

2) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

3) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

4) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

5) $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\cot x \cdot \mathrm{cosec}\, x$

6) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

7) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

8) $\frac{d}{dx}(\ell n\, x) = \frac{1}{x}$

9) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot (\ell n\, a)$

พิสูจน์ ข้อ 1) – 3) ได้พิสูจน์มาแล้ว

สำหรับข้ออื่นๆ ก็พิสูจน์ในทำนองเดียวกันโดยใช้บทนิยาม 2.1 ❑

แบบฝึกหัด 2.2 ข

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

   1) $f(x) = \frac{\ell n\, x}{x}$

   2) $f(x) = \sin x \cdot \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x \cdot \cos x}\right)$

   3) $f(x) = \frac{\tan x \cdot \left(\frac{e^x + 1}{4!}\right)}{x \cdot \sqrt{\sin x}}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้บทนิยาม 2.1

   1) $f(x) = \cos 3x$

   2) $f(x) = \sin 2x$

   3) $f(x) = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{4x^2 + 1}$

3. จงหา $f'(x)$ ที่ $x = \pi$ สำหรับฟังก์ชัน f ในข้อ 2

2.3 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

บทนิยาม 2.2

กำหนดให้ $y = g(u)$ และ $u = f(x)$ แล้วอนุพันธ์ของ y เมื่อเทียบกับ x แทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ โดยที่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

เรียกว่า "กฎลูกโซ่ของอนุพันธ์"

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้ $y = u^2 - 3u + 2$ และ $u = x^2 - 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จากสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{du}(u^2 - 3u + 2)$$
$$= 2u - 3$$

และ $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1)$
$$= 2x$$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
$$= (2u - 3)\cdot(2x)$$
$$= 4xu - 6x$$
$$= 4x(x^2 - 1) - 6x$$
$$= 4x^3 - 10x$$

❑

ตัวอย่างที่ 2.8 กำหนดให้ $y = (x-2)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ฟังก์ชันที่อยู่ในลักษณะนี้เรามีวิธีการแก้ปัญหาได้ 2 วิธี ในที่นี้ผู้เขียนจะแสดงให้ดูทั้งสองวิธี

วิธีที่ 1:

จาก $y = (x-2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 8$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$
$$= 3x^2 - 12x + 12$$

วิธีที่ 2: (โดยใช้กฎลูกโซ่)

จาก $y = (x-2)^3$

ให้ $u = x - 2$ จะได้ว่า $y = u^3$

โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{du}(u^3)\cdot\frac{d}{dx}(x-2)\\ &= 3u^2\cdot 1\\ &= 3u^2\\ &= 3(x-2)^2 = 3(x^2-4x+4)\\ &= 3x^2-12x+12\end{aligned}$$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.9 กำหนดให้ $y = \ell n(\sin x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$ จะได้ว่า $y = \ell n\, u$

โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

จาก $\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\ell n\, u) = \frac{1}{u}$

และ $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{u}\right)\cdot\cos x = \left(\frac{1}{\sin x}\right)\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ ❑

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ $y = \frac{2x}{x^3+1}$ และ $x = \frac{2t^2 - t + 2}{t^3 + 2t^2 - t - 2}$ จงหา $\frac{dy}{dt}$ และ $\frac{dy}{dt}$ ที่ $x = 1$
2. กำหนดให้ $y = \frac{\sin^2 2x}{1+\cos x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่ $x = \frac{\pi}{4}$
3. กำหนดให้ $u = f(x)$ จงหา $\frac{dy}{du}$ สำหรับทฤษฎีบท 2.2

2.4 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 2.3

อนุพันธ์อันดับสูง (Higher order derivative) หมายถึง อนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $\frac{d^n y}{dx^n}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ โดยที่ $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$

จากบทนิยาม 2.3 เราอาจสรุปเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูงได้ดังนี้

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

2) $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$

สังเกตว่าการเขียนสัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับสูงนั้นมีความรุงรัง ดังนั้น จึงอาจเขียนอีกรูปแบบหนึ่งได้คือ

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$

2) $\frac{d^3 y}{dx^3} = y'''$

3) $\frac{d^4 y}{dx^4} = y^{(4)}$

4) $\frac{d^5 y}{dx^5} = y^{(5)}$

ตัวอย่างที่ 2.10 กำหนดให้ $y = x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 1$ จงหาค่าของ $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^5 y}{dx^5}$

วิธีทำ จาก $y = x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 1$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 1)$

$= 4x^3 + 3x^2 - 4x - 1$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x^3 + 3x^2 - 4x - 1)$

$= 12x^2 + 6x - 4$

$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(12x^2 + 6x - 4)$

$= 24x + 6$

$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(24x + 6)$

$$= 24$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}(24)$$

$$= 0$$ ❑

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ $y = 2xe^{2x}$ จงหา $y^{(3)}$ และ $y^{(4)}$ ที่ $x = \frac{1}{2}$
2. กำหนดให้ $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ จงหา $y^{(3)}$ ที่ $x = \sqrt{3}$
3. กำหนดให้ $y = c_1e^{2x}$ สำหรับ c_1 ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ จงแสดงว่า $y'' - y' - 2y = 0$
4. กำหนดให้ $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\, e^x$ สำหรับจำนวนจริง c_1, c_2, c_3 ใดๆ จงแสดงว่า $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

2.5 การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้กฎของโลปิตาล

2.5.1 รูปแบบที่ยังไม่กำหนด

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}\right)$ จะเห็นได้ว่าเมื่อแทนค่า $x = 9$ ลงใน $f(x)$ แล้วจะทำให้ได้ $\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีการนิยามในคณิตศาสตร์ เราเรียกนิพจน์ $\frac{0}{0}$ ว่า “รูปแบบที่ยังไม่กำหนด” (indeterminate form) นอกจากรูปแบบที่กล่าวมาแล้ว ยังมีรูปแบบอื่นๆ อีกดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4

รูปแบบที่ยังไม่กำหนด (Indeterminate Form) หมายถึง นิพจน์ที่อยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังนี้

1) $\frac{0}{0}$
2) $\frac{\infty}{\infty}$
3) $0 \cdot \infty$
4) $\infty - \infty$
5) 0^0

ตัวอย่างที่ 2.11 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\right)$ อยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนด

วิธีทำ จากโจทย์เมื่อแทนค่า $x\to\infty$ จะทำให้ลิมิตอยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$

ซึ่งเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด ตามต้องการ ❑

2.5.2 กฎของโลปิตาล (L'Hospital Rule)

กฎของโลปิตาล (L'Hospital Rule) ใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนด ดังทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3

กำหนดให้ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องสำหรับ $x\in D_f$ และอนุพันธ์ของ f ต่อเนื่องสำหรับทุกๆ $x\in D_f$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{P'(x)}{Q'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{P''(x)}{Q''(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{P'''(x)}{Q'''(x)} = \ldots$

ทฤษฎีบท 2.3 เราจะนำไปใช้โดยไม่แสดงการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right)$

วิธีทำ จากที่เราพิจารณาในตอนต้น เราพบว่าลิมิตฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด ดังนั้นจึงใช้กฎของโลปิตาลได้

จาก $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right)$ โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right) &= \lim_{x\to 9}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}\right)\\ &= \lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{2\sqrt{9}}\right) = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าไม่ได้อยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนดแล้ว จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right) = \frac{1}{6}$ ❑

หมายเหตุ การหาค่าของ $\lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right)$ อาจไม่จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาลก็ได้ดังที่จะแสดงให้เห็น ดังนี้

จาก $$\lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right) = \lim_{x\to 9}\left[\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 9}\left[\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\right)$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.11 เราทราบว่า $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\right)$ อยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนด จึงใช้กฎของโลปิตาลได้ เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x}\right)$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนด ดังนั้น จึงใช้กฎของโลปิตาลอีกครั้งจะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}\right) = 1$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(x^x\right)$

วิธีทำ จากโจทย์จะเห็นได้ว่าลิมิตอยู่ในรูป 0^0 ซึ่งเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด

ดังนั้น ให้ $L = \lim_{x\to 0}\left(x^x\right)$ จะได้ว่า

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0}\left(x^x\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left(\ell n\, x^x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ell n\, x\right)$$

$= 0\cdot\infty$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด

พิจารณา $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ell n\, x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ell n\, x}{\frac{1}{x}}\right)$ โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ell n\, x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $\ln L = 0$ นั่นคือ $L = e^0 = 1$ ❑

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

วิธีทำ การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในข้อนี้สามารถทำได้ทั้ง 2 วิธีดังนี้

1. จาก
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= 1\cdot 1$$
$$= 1$$

2. จาก $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ จะเห็นว่าอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนดโดยทฤษฎีบท 2.3 จึงได้ว่า
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x}{1}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$
$$= 1$$
❑

แบบฝึกหัด 2.5

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}\right)$
2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)$
3. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{e^{-x}\cos 3x}{3x}\right)$

บทที่ 3

การอินทิเกรต

3.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

บทนิยาม 3.1

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้วอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ F(x) โดยที่ $F(x) = \int f(x)\,dx$

3.1 พีชคณิตของอินทิกรัลของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ C เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรตแล้ว

1) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C$
2) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx + C$
3) $\int k\,dx = kx + C$ เมื่อ $k \neq 0$
4) $\int dx = x + C$
5) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

<u>หมายเหตุ</u> 1) ทฤษฎีบท 3.1 จะนำไปใช้โดยไม่พิสูจน์

2) ไม่มีอินทิกรัลของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปการคูณหรือการหาร

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + x - 1$ จงหา $\int f(x)\,dx$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + x - 1$

จะได้ว่า $\int f(x)\,dx = \int (x^3 + x - 1)\,dx$

$= \int x^3\,dx + \int x\,dx - \int dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหา $\int f(x)\,dx$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{x}$

จะได้ว่า $\int f(x)\,dx = \int \sqrt{x}\,dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

❑

3.1.2 อินทิกรัลของฟังก์ชันอดิศัย

ทฤษฎีบท 3.2

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ x และ C เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรตแล้ว

1) $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

2) $\int \cos u\,du = \sin u + C$

3) $\int \tan u\,du = \ell n\,|\cos u| + C$

4) $\int \csc u\,du = \ell n\,|\tan u| + C$

5) $\int \sec u\,du = \ell n\,|\sec u + \tan u| + C$

6) $\int \cot u\,du = \ell n\,|\sin u| + C$

7) $\int e^{u}\,du = e^{u} + C$

8) $\int \frac{1}{u}\,du = \ell n\,|u| + C$

ทฤษฎีบท 3.2 เราจะนำไปใช้งานโดยไม่พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ จงหา $\int f(x)\,dx$

วิธีทำ $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{3x+1}\,dx$ -----(3.1.1)

ก่อนอื่นสังเกตว่า เราต้องการอินทิเกรตเทียบกับ x (dx) แต่ฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตอยู่ในรูปอื่น เราจึงต้องจัดรูปฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตใหม่ โดยสมมติให้ $u = 3x + 1$

จะได้ว่า $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+1) = 3$

ดังนั้น $dx = \frac{1}{3}du$

แทนค่า u, dx ในสมการ (3.1.1) จะได้ว่า

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{3}du\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\,|u| + C$$

แทนค่า $u = 3x + 1$ ก็จะได้ว่า $\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ell n\,|3x+1| + C$ ❑

<u>หมายเหตุ</u> การอินทิเกรตในตัวอย่างที่ 3.3 เราอาจทำได้อย่างรวดเร็วดังนี้

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}\,d(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}\,d(3x+1)$$

$$= \frac{1}{3}\ell n|3x+1| + C$$

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดให้ $f(x) = \sin(2x+3)$ จงหา $\int f(x)\,dx$

วิธีทำ $\int f(x)\,dx = \int \sin(2x+3)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\,d(2x+3)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ จงหา $\int f(x)\,dx$

วิธีทำ $\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ -----(1)

ให้ $u = x^2 + 1$ จะได้ว่า $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$

ดังนั้น $dx = \frac{1}{2x}\,du$

แทนค่า u, dx ลงในสมการ (1) จะได้ว่า

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{u}\cdot\left(\frac{1}{2x}\,du\right)$$

$$= \int \frac{1}{2u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,|x^2+1| + C$$ ❑

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาอินทิกรัลของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1) $\int (x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3\sqrt{x}} + 1)\, dx$

   2) $\int [e^{3x+1} + (3x+1)]\, dx$

   3) $\int (3 \cos 2x + 2 \sin 3x)\, dx$

   4) $\int \cot x \cdot \ell n\,(\sin x)\, dx$

ೞ ೞ ೞ ೞ ೞ ೞ

3.2 อินทิกรัลจำกัดเขต

3.2.1 แนวคิดเกี่ยวกับอินทิกรัลจำกัดเขต

บทนิยาม 3.2
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] แล้วอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย F(x) โดยที่

$$F(x) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่างที่ 3.6 กำหนดให้ $f(x) = e^{x^2 + \ell n\, x}$ จงหาค่าของ $\int_0^1 f(x)\, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\, dx &= \int_0^1 \left(e^{x^2 + \ln x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x \cdot e^{x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2} \right) d(x^2) \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(e - e^0) \\
&= \frac{1}{2}(e - 1)
\end{aligned}$$

❑

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาค่าของ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cot 2x)\cdot \ell n\,(\sin 2x)\,dx$

วิธีทำ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cot 2x)\cdot \ell n\,(\sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cot 2x)\cdot \ell n\,(\sin 2x)\,d\,(2x)$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ell n\,(\sin 2x)\,d\,(\ell n\,(\sin 2x))$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ell n\,(\sin 2x)\right]^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ell n\,(\sin 2x)\cdot \ell n\,(\sin 2x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ell n\,(\sin\frac{2\pi}{3})\cdot \ell n\,(\sin\frac{2\pi}{3})\right] - \frac{1}{4}\left[\ell n\,(\sin\frac{\pi}{2})\cdot \ell n\,(\sin\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ell n\,(\sin\frac{\pi}{3})\cdot \ell n\,(\sin\frac{\pi}{3})\right] - \frac{1}{4}\left[\ell n\,(\sin\frac{\pi}{2})\cdot \ell n\,(\sin\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ell n\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \ell n\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \frac{1}{4}\left[\ell n(1)\cdot \ell n(1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ell n\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2$$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาค่าของ $\int_1^3 \left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)dx$

วิธีทำ $\int_1^3 \left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3+1}\right)dx^3$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3+1}\right)d\,(x^3+1)$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|x^3+1\right|\Big|_1^3$$

$$= \frac{1}{3}(\ell n\,|3^3+1|) - \frac{1}{3}\,(\ell n\,|1^3+1|)$$

$$= \frac{1}{3}(\ell n\,|28|) - \frac{1}{3}(\ell n\,|2|)$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\left|\frac{28}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\ 14$$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.9 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

ถ้า $f'(1) = 15$ และ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{55}{12}$ แล้ว f(1) มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

จะได้ว่า $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

ดังนั้น $f'(1) = 3(1)^2 + 2a(1) + b = 3 + 2a + b = 15 \Rightarrow 2a + b = 12$ -----(3.2.1)

และจาก $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{55}{12}$ จะได้ว่า

$$\int_0^1 \left(x^3 + ax^2 + bx + 1\right)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + x\right)_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{1}{3}a(1)^3 + \frac{1}{2}b(1)^2 + (1)\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1$$

$$= \frac{3 + 4a + 6b + 12}{12}$$

ดังนั้น $\frac{3 + 4a + 6b + 12}{12} = \frac{55}{12}$

จะได้ $3 + 4a + 6b + 12 = 55$

$$4a + 6b = 40$$

$$2a + 3b = 20 \quad \text{-----(3.2.2)}$$

(3.2.2) – (3.2.1); $2b = 8$

$$b = 4$$

แทนค่า $b = 4$ ในสมการ (3.2.2) จะได้ว่า

$$2a + 3(4) = 20$$

$$2a + 12 = 20$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$

จะได้ว่า $f(1) = 1^3 + 4(1)^2 + 4(1) + 1 = 10$ ❑

แบบฝึกหัด 3.2 ก

จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_{3}^{4} \frac{x^2 + 3x + 2}{x} dx$

2. $\int_{2}^{4} \frac{\ell n\, x}{x} dx$

3. $\int_{1}^{2} (x + 1)e^{x^2}\, dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

5. $\int_{9}^{16} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} dx$

6. $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$

3.2.2 สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต

อินทิกรัลจำกัดเขตมีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ในหลายๆ เรื่องดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอินทิกรัลได้บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) ถ้า $a \le c \le b$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4) ถ้า k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

1)
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a)\\ &= -[F(a) - F(b)]\\ &= -\int_b^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\int_a^a f(x)\,dx &= F(a) - F(a)\\ &= 0\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a)\\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a)\\ &= [F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)]\\ &= \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx\\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

4) $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = kF(b) - kF(a)$

$= k[F(b) - F(a)]$

$= k\int_a^b f(x)\,dx$ ❑

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

3.3 เทคนิคการอินทิเกรต

การอินทิเกรตฟังก์ชันบางอย่างไม่สามารถอินทิเกรตได้โดยตรงตามสูตรต่างๆ ที่เราได้พิจารณามาแล้วข้างต้น ดังนั้น ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาเกี่ยวกับเทคนิคการอินทิเกรตฟังก์ชันเหล่านั้น โดยในที่นี้เพื่อความง่ายเราจะพิจารณาเพียง 2 เทคนิค ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.3.1 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแทนค่า (Integration by substitution)

การอินทิเกรตโดยการแทนค่า ได้เคยพิจารณามาแล้วจากตัวอย่างที่ 3.3 – 3.5 ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาเพิ่มเติมจากฟังก์ชันในลักษณะอื่นๆ อีก

หลักการทั่วไปของการอินทิเกรตโดยการการแทนค่า คือ พิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย หรือในรูปที่คล้ายกันได้หรือไม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาค่า $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

วิธีทำ ฟังก์ชันที่เรากำลังพิจารณาอยู่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

กำหนดให้ $u = x^2 + 1$ จะได้ว่า $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\cdot du$

ดังนั้น $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\sqrt{u}\cdot\left(\frac{1}{2x}\cdot du\right)$

$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$ ❑

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาค่าของ $\int_3^4 2x \cdot \ell n\, x^2\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

จะได้ว่า $\int_3^4 2x \cdot \ell n\, x^2\, dx = \int_3^4 2x \cdot \ell n\, u \cdot \left(\frac{1}{2x}du\right)$

$$= \int_3^4 \ell n\, u\, du$$

$$= -u\Big|_3^4 + u \cdot \ell n|u|\Big|_3^4$$

$$= -(4-3) + [(4)\ell n\,|4| - (3)\ell n\,|3|]$$

$$= -1 + 8\,\ell n\, 2 - 3\,\ell n\, 3$$

❑

3.3.2 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแยกเศษส่วนย่อย (Integration by partial fractions)

การอินทิเกรตโดยการแยกเศษส่วนย่อย ใช้ในกรณีที่ฟังก์ชันที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นเป็นฟังก์ชันพหุนาม ตลอดจนฟังก์ชันใดก็ตามที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้

รูปแบบของฟังก์ชันตัวส่วนที่สามารถแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้

1) ตัวส่วนสามารถแยกตัวประกอบแล้วไม่ซ้ำกันเลย ให้สมมติ

$$\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{A_3}{x - a_3} + \ldots + \frac{A_k}{x - a_k}$$

2) ตัวส่วนสามารถแยกตัวประกอบแล้วมีตัวประกอบที่ซ้ำกันบ้าง ให้สมมติ

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \ldots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$$

3) ตัวส่วนอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ให้สมมติ

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

4) ตัวส่วนอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบได้และพจน์ซ้ำกันให้สมมติ

$$\frac{A_1x + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{A_3x + B}{(ax^2 + bx + c)^3} + \ldots + \frac{A_kx + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

อนึ่ง ก่อนที่จะแยกตัวประกอบของตัวส่วนเพื่อทำให้เป็นเศษส่วนย่อยจะต้องแน่ใจว่าดีกรีของพหุนามตัวเศษน้อยกว่าดีกรีของพหุนามตัวส่วนเสมอ ในกรณีที่พบว่าดีกรีของพหุนามตัวเศษมากกว่าหรือเท่ากับดีกรีของพหุนามตัวส่วนแล้ว จะต้องทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำก่อนโดยการตั้งหารยาว

ตัวอย่างที่ 3.12 จงหาค่าของ $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x^2 + 3}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$= \frac{x^2 + 3}{x(x + 1)^2}$$

ดังนั้น สมมติให้ $\frac{x^2 + 3}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$

$$= \frac{A(x + 1)^2}{x(x + 1)^2} + \frac{Bx(x + 1)}{x(x + 1)^2} + \frac{Cx}{x(x + 1)^2}$$

$$= \frac{A(x^2 + 2x + 1)}{x(x + 1)^2} + \frac{B(x^2 + x)}{x(x + 1)^2} + \frac{Cx}{x(x + 1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax + A}{x(x + 1)^2} + \frac{Bx^2 + Bx}{x(x + 1)^2} + \frac{Cx}{x(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A}{x(x + 1)^2}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $A + B = 1$

$2A + B + C = 0$

$A = 3$

ได้ว่า $B = -2$ ดังนั้น $C = -(-2) - 2(3) = 2 - 6 = -4$

เพราะฉะนั้น $\frac{x^2 + 3}{x(x + 1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x + 1} - \frac{4}{(x + 1)^2}$

นั่นคือ $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{2}{x + 1}\,dx - \int \frac{4}{(x + 1)^2}\,dx$

$$= 3\,\ell n\,|x| - 2\,\ell n\,|x + 1| + \frac{4}{x + 1} + C$$ ❑

แบบฝึกหัด 3.3

จงหาอินทิกรัลของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\int \frac{x}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}\,dx$

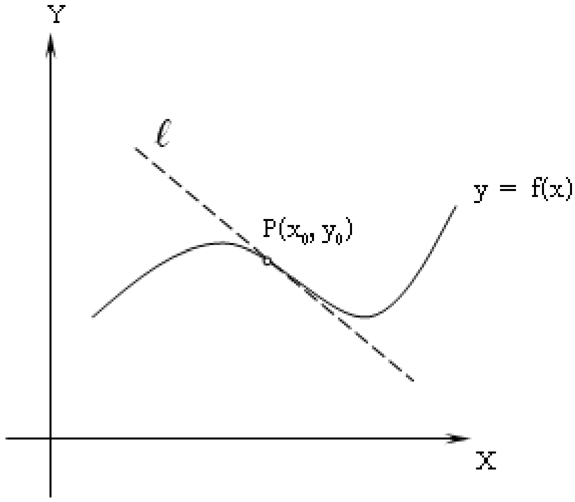
2. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

☙ ☙ ☙ ☙ ☙ ☙

บทที่ 4
การประยุกต์เกี่ยวกับแคลคูลัส

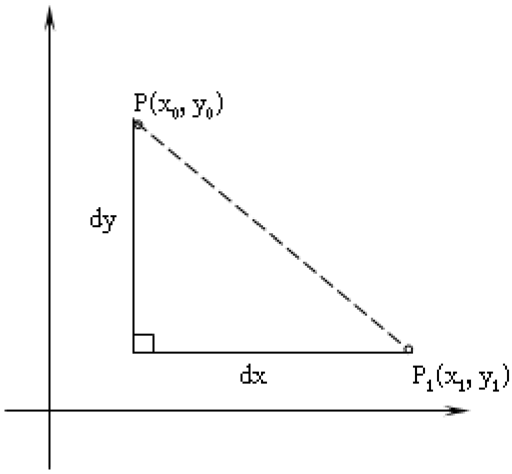
4.1 การหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

พิจารณาเส้นโค้ง $y = f(x)$ ดังรูป



รูป 4.1 เส้นโค้ง $y = f(x)$

ให้ $P(x_0, y_0)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉากและอยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อเคลื่อนจุด P ดังกล่าวออกไปเล็กน้อยตามแนวเส้นโค้ง สมมติเป็นจุด $P_1(x_1, y_1)$ จะได้ดังรูป (เพื่อให้เห็นภาพและเข้าใจมากยิ่งขึ้น ผู้เขียนจึงขยายภาพออก)



รูป 4.2 จุด P, P_1 ที่อยู่บนเส้นตรง ℓ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเส้นโค้ง $y = f(x)$

จากรูป 4.2 เนื่องจากจุด P กับจุด P_1 อยู่ห่างกันน้อยมาก เราจึงอาจพิจารณาว่าความยาวของด้านประกอบมุมฉากเป็นความยาวเล็กๆ ตามแนวแกน Y และแกน X เท่ากับ dy และ dx ตามลำดับ และจะได้ว่าความชันของ

เส้นตรง ℓ (m) มีค่าเท่ากับ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ นั่นเอง

เพราะฉะนั้น เราจึงได้ว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $P(x_0, y_0)$ ใดๆ ที่อยู่บนเส้นโค้งจะมีค่าเท่ากับ $f'(x_0)$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x + 2$ ที่จุด (0, 2)

วิธีทำ จาก $y = x^2 - 3x + 2$

จะได้ว่า $y'(x) = 2x - 3$

เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (0, 2) มีค่าเท่ากับ $2(0) - 3 = -3$ ❑

ตัวอย่างที่ 4.2 จากเส้นโค้งที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 4.1 จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ผ่านจุด (0, 2)

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 4.1 เราทราบว่า $m = -3$

จากสมการของเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

แทนค่า $m = -3,\ x_1 = 0,\ y_1 = 2$ ลงในสมการเส้นตรงดังกล่าว

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} y - 2 &= -3(x - 0) \\ y - 2 &= -3x \\ 3x + y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

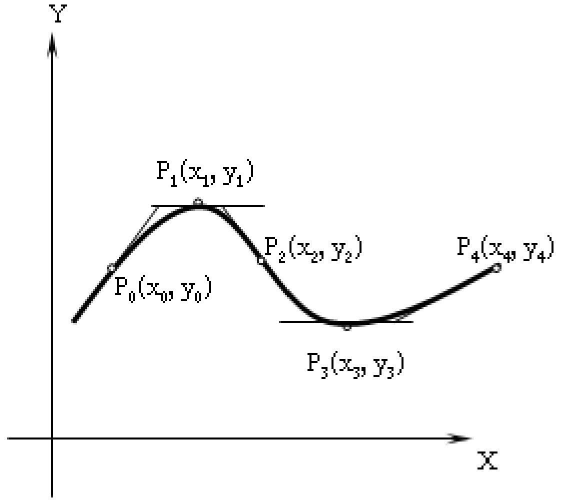
เพราะฉะนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x + 2$ ที่ผ่านจุด (0,2) คือ $3x + y - 2 = 0$ ❑

แบบฝึกหัด 4.1

1. กำหนดให้ $y = x^3 + 2x - 1$ เป็นเส้นโค้งในระนาบ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งดังกล่าวที่จุด P(1, 2)
2. ถ้าทราบว่าเส้นตรง $4x - y - 3 = 0$ เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ที่จุด (1, 1) ถ้าทราบว่า (0, –2) อยู่บนเส้นโค้งดังกล่าวด้วย จงหาสมการของเส้นโค้งนี้

4.2 การหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

กำหนด $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งในระนาบดังรูป



รูป 4.3 จุด P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 อยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราสามารถหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งสำหรับจุด (x, y) ที่อยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ได้เสมอ ดังนั้น ด้วยกระบวนการดังกล่าวนี้และจากรูป 4.3 ที่จุด P_0 เราก็จะได้สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งชุดหนึ่ง ซึ่งมีความชัน $(m_1) > 0$ ในทำนองเดียวกันที่จุด P_2 เราก็จะได้สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งอีกชุดหนึ่งซึ่งมีความชัน $(m_2) < 0$

กำหนดจุด P_1 อยู่ระหว่างจุด P_0 กับจุด P_2 โดยมีสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P_1 มีความชันเป็นศูนย์ ในทำนองเดียวกัน กำหนดจุด P_3 อยู่ระหว่างจุด P_2 กับจุด P_4 โดยมีสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P_3 ที่มีความชันเป็นศูนย์

เราจะเรียกจุดที่ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับศูนย์ ซึ่งอยู่ระหว่างจุดที่มีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นบวกและจุดที่มีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นลบว่า “จุดสูงสุดสัมพัทธ์” ในทำนองเดียวกันเราเรียกจุดที่ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับศูนย์ ซึ่งอยู่ระหว่างจุดที่มีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นลบและจุดที่มีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นบวกว่า “จุดต่ำสุดสัมพัทธ์”

การพิจารณาว่าจุดใดเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์หรือจุดสูงสุดสัมพัทธ์นั้น มีขั้นตอนโดยสรุปดังนี้

1) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ ได้ $f'(x)$
2) ให้ $f'(x) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x ซึ่งค่า x ที่ได้นี้เรียกว่า “ค่าวิกฤต” (critical point)
3) นำค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 2) ไปทดสอบตามวิธีการที่จะได้กล่าวต่อไป

4.2.1 การทดสอบค่าวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมมติให้ a เป็นจุดวิกฤต สามารถสรุปได้ว่า

1) a เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ (ต้องเป็นจริงพร้อมกันทั้งสองข้อ)

   1.1) เลือก $x < a$ แล้วได้ว่า $f'(x) > 0$

   1.2) เลือก $x > a$ แล้วได้ว่า $f'(x) < 0$

2) a เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ (ต้องเป็นจริงพร้อมกันทั้งสองข้อ)

   2.1) เลือก $x < a$ แล้วได้ว่า $f'(x) < 0$

   2.2) เลือก $x > a$ แล้วได้ว่า $f'(x) > 0$

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) โดยการใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

จะได้ว่า $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

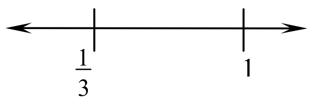
สมมติให้ $f'(x) = 0$

จะได้ว่า $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$(3x-1)(x-1) = 0$$

ได้ค่าวิกฤต $x = \frac{1}{3}$ หรือ $x = 1$

พิจารณาเส้นจำนวนจริงต่อไปนี้



ที่ $x = \frac{1}{3}$ เลือก $x = 0$ จะได้ว่า $f'(0) = 1 > 0$

เลือก $x = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $x = \frac{1}{3}$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ที่ $x = 1$ เลือก $x = \frac{3}{4}$ จะได้ว่า $f'(\frac{3}{4}) = -\frac{5}{16} < 0$

เลือก $x = \frac{3}{2}$ จะได้ว่า $f'(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4} > 0$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $f(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{50}{27}$

และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $f(1) = 1^3 - 2(1)^2 + (1) - 2 = -2$ ❑

4.2.2 การทดสอบค่าวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

การทดสอบค่าวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับสองมีความสะดวกกว่าการใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งแต่อาจมีเงื่อนไขบางประการที่ทำให้การทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสองไม่สามารถสรุปได้ จะต้องกลับไปใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งตามเดิม

เมื่อกำหนดให้ a เป็นค่าวิกฤตที่ได้จากการแก้สมการ $f'(x) = 0$ แล้วการทดสอบค่าวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง มีวิธีการโดยสรุปดังนี้

1) หาค่าของ $f''(x)$
2) นำค่าวิกฤตไปแทนค่าใน $f''(x)$
3) a จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $f''(a) < 0$

   a จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $f''(a) > 0$

   ถ้า $f''(a) = 0$ ไม่สามารถสรุปได้ ในกรณีเช่นนี้จะต้องกลับไปใช้การทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่งตามเดิม

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) โดยการใช้อนุพันธ์อันดับสอง

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 4.3 เราได้ค่าวิกฤต 2 ค่าได้แก่ $a = \frac{1}{3}$ และ $a = 1$

จาก $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

จะได้ $f''(x) = 6x - 4$

แทนค่า $x = \frac{1}{3}$ จะได้ $f''(\frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3}) - 4 = -2 < 0$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $x = \frac{1}{3}$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $f''(1) = 6(1) - 4 = 2 > 0$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดของ f(x) คือ $f(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{50}{27}$

และค่าต่ำสุดของ f(x) คือ $f(1) = 1^3 - 2(1)^2 + (1) - 2 = -2$ ❑

จะเห็นได้ว่า การใช้อนุพันธ์อันดับสองในการทดสอบค่าวิกฤตมีความสะดวกกว่าการใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง พิจารณาอีกตัวอย่างหนึ่ง ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$ จงหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

จะได้ว่า $f'(x) = x^2 - 2x + 1$ และ $f''(x) = 2x - 2$

ให้ $f'(x) = 0$

ดังนั้น $x^2 - 2x + 1 = 0$

แก้สมการได้ $x = 1$ ดังนั้น $f''(1) = 2(1) - 2 = 0$

จะเห็นว่าไม่สามารถสรุปได้ จึงต้องใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งในการทดสอบ

เลือก $x = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $f'(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} > 0$

เลือก $x = \frac{3}{2}$ จะได้ว่า $f'(\frac{3}{2}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} > 0$

จะเห็นว่า จุดวิกฤต $x = 1$ ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น สรุปได้ว่าไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ❑

4.2.3 การประยุกต์เกี่ยวกับการหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

การประยุกต์ที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ ได้แก่ การหาพื้นที่มากที่สุดตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ การหาปริมาตรมากที่สุดตามเงื่อนไขที่กำหนด และการประยุกต์ทางฟิสิกส์ในเรื่องกลศาสตร์

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มากที่สุด ซึ่งทำให้มีเส้นรอบรูปยาว 12 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ x เป็นความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

และ y เป็นความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังนั้น จะได้ว่า $2(x + y) = 12 \Rightarrow y = 6 - x$

ให้ A(x) = พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดังนั้น $A(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$A'(x) = 6 - 2x$ และ $A''(x) = -2$ สำหรับทุกๆ ค่า x

จาก $6 - 2x = 0$ จะได้ $x = 3$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มากที่สุดคือ $A(3) = (3)(6 - 3) = 9$ ตารางเซนติเมตร ❑

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาความสูงที่มากที่สุดของทรงกระบอกตันโดยที่ $h + r = 6$ เมื่อ h, r คือ ส่วนสูงและความยาวรัศมีของทรงกระบอกตามลำดับ ที่ทำให้ทรงกระบอกดังกล่าวมีปริมาตรมากที่สุด

วิธีทำ กำหนดให้ V(h, r) = ปริมาตรของทรงกระบอก = $\pi r^2 h$

เนื่องจาก $h + r = 6$ จะได้ว่า $r = 6 - h$

จะได้ว่า $V(h, r) = V(h) = \pi(6 - h)^2 h$

$= \pi(36 - 12h + h^2)h$

$= 36\pi h - 12\pi h^2 + \pi h^3$

ดังนั้น $V'(h) = 36\pi - 24\pi h + 3\pi h^2$ และ $V''(h) = -24\pi + 6\pi h$

ให้ $V'(h) = 0$ จะได้ $36\pi - 24\pi h + 3\pi h^2 = 0$

$\pi(36 - 24h + 3h^2) = 0$

แต่ $\pi \neq 0$ ดังนั้น $36 - 24h + 3h^2 = 0$

จะได้ว่า $3(12 - 8h + h^2) = 0$

$(h - 6)(h - 2) = 0$

ดังนั้น $h = 6$ หรือ $h = 2$

แทนค่า $h = 6$ ใน $V''(h)$ จะได้ $V''(6) = -24\pi + 6\pi(6) = -24\pi + 36\pi = 12\pi > 0$

ในทำนองเดียวกัน แทนค่า $h = 2$ จะได้ $V''(2) = -24\pi + 6\pi(2) = -24\pi + 12\pi = -12\pi < 0$

เพราะฉะนั้น ความสูงที่มากที่สุดที่ทำให้ทรงกระบอกมีปริมาตรมากที่สุด และสอดคล้องกับเงื่อนไข $h + r = 6$ มีค่าเท่ากับ 2 หน่วย ❑

ตัวอย่างที่ 4.8 จากวิชาฟิสิกส์เราทราบว่า $a = \frac{dv}{dt}$ และ $v = \frac{ds}{dt}$

เมื่อ s = ระยะกระจัดของวัตถุ (หน่วย: เมตร)

v = ความเร็วของวัตถุ (หน่วย: เมตรต่อวินาที)

a = ความเร่งของวัตถุ (หน่วย: เมตรต่อวินาที^{2})

ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งมีความเร่งเป็นฟังก์ชันกับเวลาคือ $a(t) = 2t^3 - 7t^2 + 3t + 2$ จงหา

1) เวลาที่วัตถุชิ้นนี้มีความเร่งสูงสุด

2) สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อกำหนดให้ $v(1) = \frac{8}{3}$ และ $s(1) = \frac{61}{60}$

วิธีทำ <u>*ตอนที่ 1*</u>

จากสมการ $a(t) = 2t^3 - 7t^2 + 3t + 2$

จะได้ $a'(t) = 6t^2 - 14t + 3$ และ $a''(t) = 12t - 14$

ให้ $a'(t) = 0$ แก้สมการได้ค่าวิกฤต t ที่เป็นจำนวนจริงคือ $t = 0.24$ หรือ $t = 2.09$

<u>*ทดสอบค่าวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง*</u>

ที่ $t = 0.24$

พิจารณา $t = 0$ แทนค่าใน $a'(t)$ ได้ $a'(0) = 6(0)^2 - 14(0) + 3 = 3 > 0$

พิจารณา $t = 0.25$ แทนค่าใน $a'(t)$ ได้ $a'(0.25) = 6(0.25)^2 - 14(0.25) + 3 = -0.13 < 0$

ดังนั้น $t = 0.24$ เป็นจุดสูงสุด

ที่ $t = 2.09$

พิจารณา $t = 2$ แทนค่าใน $a'(t)$ ได้ $a'(2) = 6(2)^2 - 14(2) + 3 = -1 < 0$

พิจารณา $t = 2.1$ แทนค่าใน $a'(t)$ ได้ $a'(2.1) = 6(2.1)^2 - 14(2.1) + 3 = 0.06 > 0$

ดังนั้น $t = 2.09$ เป็นจุดต่ำสุด

เพราะฉะนั้น สรุปได้ว่าที่ $t = 0.24$ วัตถุจะมีความเร่งสูงสุด

ตอนที่ 2

จากสมการ $a(t) = 2t^3 - 7t^2 + 3t + 2$ และจากความสัมพันธ์ $a = \frac{dv}{dt}$ จะได้ $dv = a\,dt$ จะได้ว่า

$$v(t) = \int dv = \int a\,dt = \int\left(2t^3 - 7t^2 + 3t + 2\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + C_1$$ เมื่อ C_1 เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต -----(4.2.1)

แทนค่า $v(1) = 4$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$v(1) = \frac{1}{2}(1)^4 - \frac{7}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 + 2(1) + C_1 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{3} + \frac{3}{2} + 2 + C_1 = \frac{8}{3}$$

$$-\frac{7}{3} + C_1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow C_1 = 1$$

ดังนั้น $v(t) = \frac{1}{2}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1$

จากความสัมพันธ์ $v = \frac{ds}{dt}$ จะได้ $ds = v\,dt$ ดังนั้น

$$s(t) = \int ds = \int v\,dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{2}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1\right)dt$$

$$= \frac{1}{10}t^5 - \frac{7}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + t^2 + t + C_2$$ เมื่อ C_2 เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต -----(4.2.2)

แทนค่า $s(1) = \frac{61}{60}$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$s(1) = \frac{1}{10}(1)^5 - \frac{7}{12}(1)^4 + \frac{1}{2}(1)^3 + (1)^2 + 1 + C_2 = \frac{61}{60}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{7}{12} + \frac{1}{2} + 1^2 + 1 + C_2 = \frac{61}{60}$$

$$\frac{6 - 35 + 30}{60} + 2 + C_2 = \frac{61}{60}$$

$$\frac{1}{60} + 2 + C_2 = \frac{61}{60}$$

$$2 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1 - 2 = -1$$

ดังนั้น $s(t) = \frac{1}{10}t^5 - \frac{7}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + t^2 + t - 1$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ตามต้องการ ❑

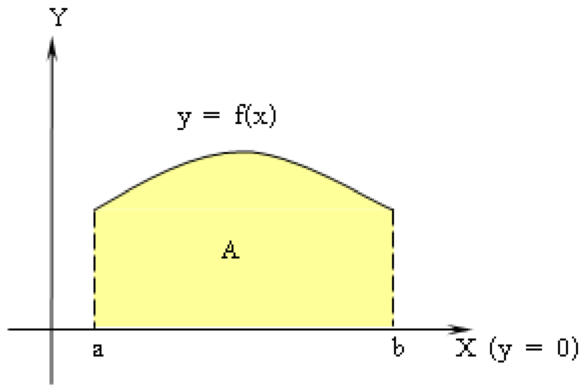
แบบฝึกหัด 4.2

1. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f''(x) = 2x + 1$ ถ้าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ $\frac{1}{2}$ ที่ $x = -1$ แล้ว ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับเท่าใด

4.3 การหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งที่กำหนดให้

4.3.1 พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$

การหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ เป็นกรณีที่ง่ายที่สุด พิจารณารูปต่อไปนี้



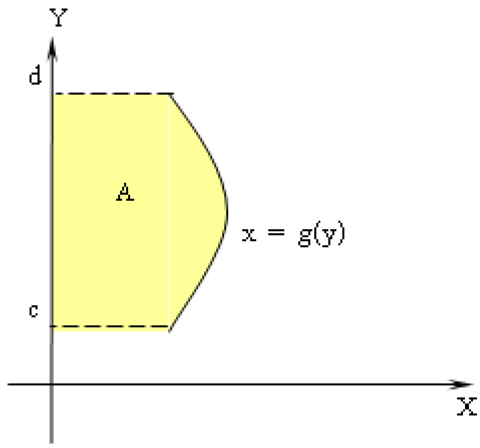
รูป 4.4 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$

ให้ A = พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$

จะได้ว่า
$$A = \int_a^b dA = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ข้อสังเกต พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งตามที่พิจารณานี้เป็นพื้นที่ส่วนที่อยู่เหนือแกน X เท่านั้น หากต้องการพิจารณาพื้นที่ส่วนที่อยู่ใต้แกน X ให้ตอบในรูปค่าสัมบูรณ์เสมอ

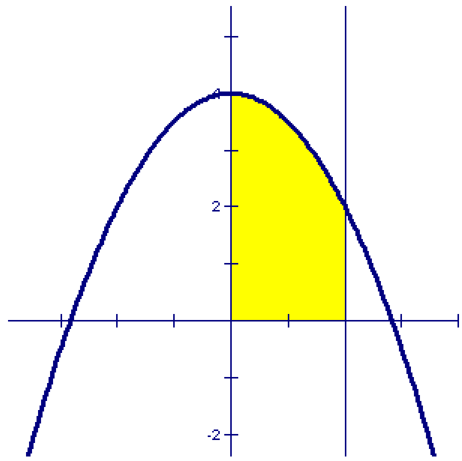
ในทำนองเดียวกัน การหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$ เส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ พิจารณารูปต่อไปนี้



รูป 4.5 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง x = g(y) เส้นตรง y = c และ y = d

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4 - \frac{1}{2}x^2$ เส้นตรง $x = 0$ และเส้นตรง $x = 2$ เฉพาะส่วนที่อยู่เหนือแกน X เท่านั้น

วิธีทำ จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้นำมาวาดกราฟได้ดังนี้



ดังนั้น $A = \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

$= \int_0^2 4\,dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right) dx$

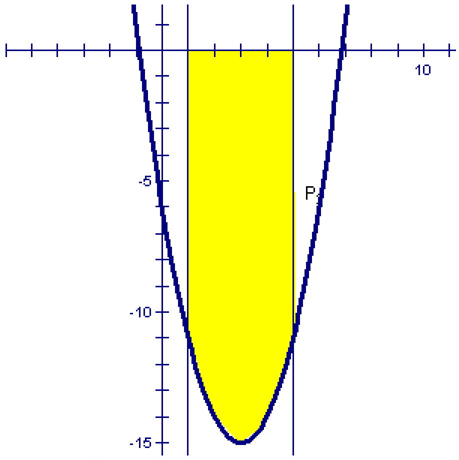
$= 4(2-0) - \left(\frac{1}{6}x^3\right)_0^2$

$= 8 - \frac{1}{6}(2^3)$

$= 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$ ตารางหน่วย ❑

ตัวอย่างที่ 4.10 จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 6x - 6$ เส้นตรง $x = 1$, $x = 5$ และ $y = 0$

วิธีทำ จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้นำมาวาดกราฟได้ดังนี้



ดังนั้น $A = \left|\int_1^5 \left(x^2 - 6x - 6\right)dx\right|$

$= \left|\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 6x\right|_1^5$

$= \left|(\frac{5^3}{3} - 3(5^2) - 6(5)) - (\frac{1^3}{3} - 3(1^2) - 6(1))\right|$

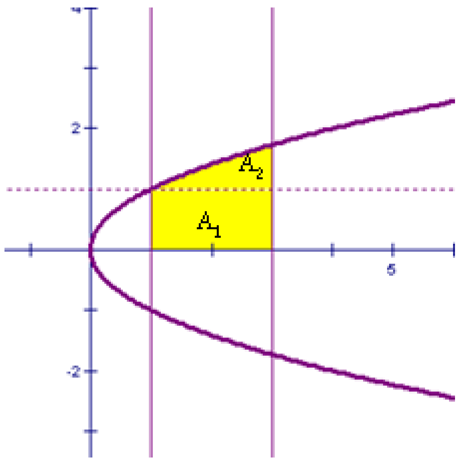
$= \left|(\frac{125}{3} - 75 - 30) - (\frac{1}{3} - 3 - 6)\right|$

$= \left|(\frac{125}{3} - 105) - (\frac{1}{3} - 9)\right|$

$= \left|\frac{124 - 288}{3}\right| = \left|-\frac{164}{3}\right| = \frac{164}{3}$ ตารางหน่วย ❑

ตัวอย่างที่ 4.11 จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ เส้นตรง $x = 1$, $x = 3$ และแกน X

วิธีทำ จากโจทย์นำมาวาดกราฟได้ดังนี้



จากโจทย์จะเห็นได้ว่า เราต้องหาพื้นที่โดยการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร y กำหนดให้เส้นตรง $y = 1$ แบ่งพื้นที่ A_1 กับ A_2 ออกจากกัน

ให้ $A = A_1 + A_2 = \int dA_1 + \int dA_2$ -----(4.3.1)

พิจารณา A_1 จะเห็นได้ว่าเป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้น $A_1 = (2)(1) = 2$ ตารางหน่วย

พิจารณา A_2 จะเห็นได้ว่า $\int dA_2 = \int_1^{\sqrt{3}} y^2\,dy$

$$= \frac{1}{3}y^3\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{3}\right)^3 - 1^3\right]$$

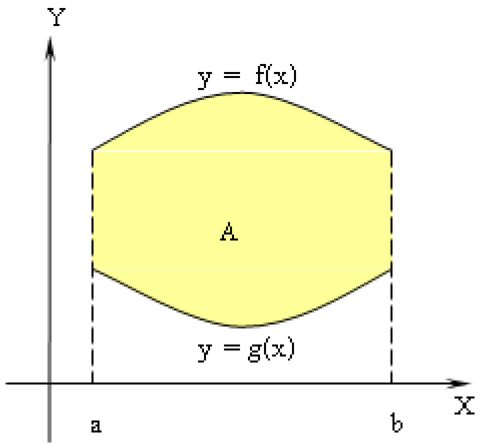
$$= \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right)$$

เพราะฉะนั้น $A = 2 + \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 1) = \frac{5}{3} + \sqrt{3}$ ตารางหน่วย ❑

<u>ข้อเสนอแนะ</u> ขอให้ผู้อ่านลองหาพื้นที่ของตัวอย่างที่ 4.11 ด้วยการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x

4.3.2 พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง y = f(x) และ y = g(x)

กำหนดให้ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนระนาบ XY พิจารณารูปต่อไปนี้



รูป 4.6 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง y = f(x) และ y = g(x)

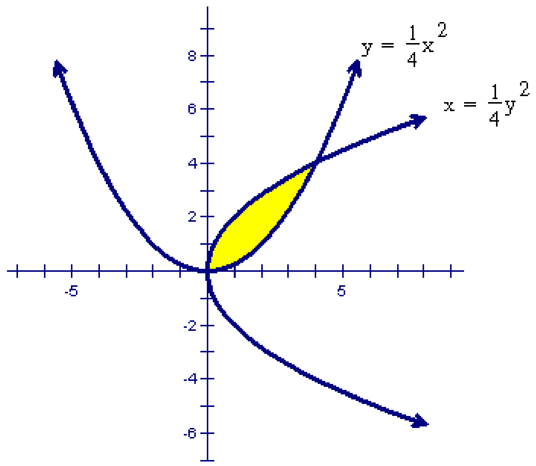
จากรูป 4.6 พื้นที่ A ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ อาจพิจารณาแยกเป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยแกน X กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน X กับเส้นโค้ง $y = g(x)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

ตัวอย่างที่ 4.12 จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{1}{4}x^2$ และเส้นโค้ง $x = \frac{1}{4}y^2$

วิธีทำ จากโจทย์นำมาวาดกราฟเพื่อหาลิมิตของการอินทิเกรตได้ดังนี้



จาก $y = \frac{1}{4}x^2$ -----(4.3.2)

และ $x = \frac{1}{4}y^2$ -----(4.3.3)

แทนค่า (2) ใน (1) ได้

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}y^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}y^4\right)$$

$$= \frac{1}{64}y^4$$

$$\frac{1}{64}y^4 - y = 0$$

$$y^4 - 64y = 0$$

$$y(y^3 - 64) = 0$$

$$y(y-4)(y^2 + 4y + 16) = 0$$

แต่ $y^2 + 4y + 16 > 0$ สำหรับทุกค่า y

จะได้ว่า $y = 0$ หรือ $y = 4$

นั่นคือ จุดตัดของระบบสมการคือ (0, 0), (4, 4)

เพราะฉะนั้น $A = \frac{1}{4}\int_0^4 \left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(4)^3 - \frac{4}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{32}{3}\right)$$

$= \frac{8}{3}$ ตารางหน่วย ❑

บรรณานุกรม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2**. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541.

ชมรมบัณฑิตแนะแนว. **เฉลยข้อสอบ Ent' มีนา 46**. กรุงเทพฯ : สำนักงานบัณฑิตแนะแนว, 2546.

ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และคณะ. **เอกสารประกอบคำบรรยายวิชาคณิตศาสตร์ 1 ในโครงการแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ 2004**. กรุงเทพฯ : ชมรมบัณฑิตแนะแนว, 2547.

มานัส บุญยัง. **การวิเคราะห์เชิงจริงเบื้องต้น 1**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2545.

สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ. **แคลคูลัสขั้นสูง 1**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2547.