

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

จากฟังก์ชันที่เราได้ศึกษามาในเนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน เช่น $y = 3x + 2$ หรือ $y = x^2$ เราเรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่า ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาฟังก์ชันอดิศัย ซึ่งต้องอาศัยความรู้เรื่องเลขยกกำลังด้วย เราเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่าเป็น “ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function)”

บทนิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล กำหนดด้วย $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

1. กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ก่อนที่จะทำความเข้าใจในหัวข้อนี้ เราจะมาทำความรู้จักกับคำว่า “ฟังก์ชันลด” และ “ฟังก์ชันเพิ่ม” เสียก่อน

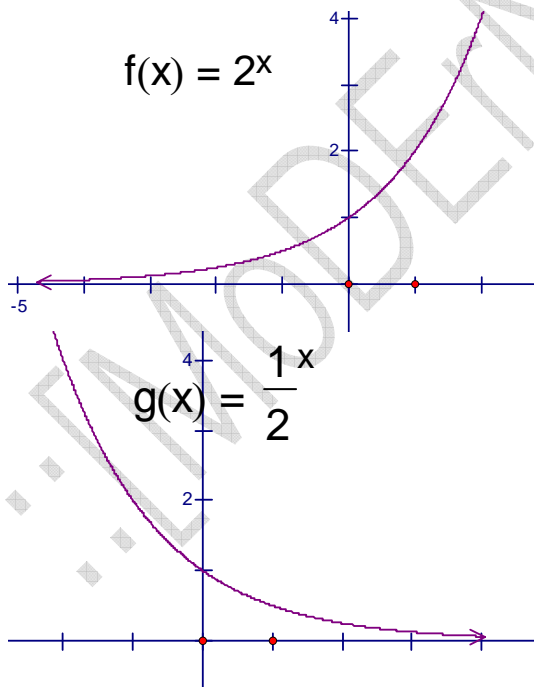
ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะเพิ่มขึ้น เช่น $f(x) = x^3 + 1$

ฟังก์ชันลด (decreasing function)

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันลด เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะลดลง เช่น $f(x) = \frac{1}{x}$

จากบทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล เราพบว่า ฐานจะต้องมากกว่าศูนย์ และไม่เท่ากับหนึ่ง เพราะถ้ามากกว่าหนึ่ง จะส่งผลให้กราฟเป็นกราฟเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ขอให้พิจารณากราฟมาตรฐานของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลต่อไปนี้



พิจารณากราฟของสมการ $y = 2^x$

1. กราฟตัดแกน y ที่คู่อันดับ $(0, 1)$
2. โดเมนของกราฟ คือ \mathbb{R}
3. เรนจ์ของกราฟ คือ \mathbb{R}^+

พิจารณากราฟของสมการ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1. กราฟตัดแกน y ที่คู่อันดับ $(0, 1)$
2. โดเมนของกราฟ คือ \mathbb{R}
3. เรนจ์ของกราฟ คือ \mathbb{R}^+

จากตัวอย่างของกราฟทั้งสองนี้ สามารถสรุปข้อสังเกตของกราฟในกรณี $y = a^x; a > 0, a \neq 1$ ได้ดังนี้

1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x; a > 0, a \neq 1$ จะตัดแกน y ที่คู่อันดับ $(0, 1)$ เสมอ เพราะ $a^0 = 1$
2. โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล กรณี $y = a^x; a > 0, a \neq 1$ คือเซตของจำนวนจริง เรนจ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล กรณี $y = a^x; a > 0, a \neq 1$ คือเซตของจำนวนจริงบวก
3. กรณีที่ a อยู่ในช่วง $(1, \infty)$ แล้ว $y = a^x$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม
กรณีที่ a อยู่ในช่วง $(0, 1)$ แล้ว $y = a^x$ จะเป็นฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล : Exponential Function

4. ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}^+ นั่นคือ $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

5. การเปรียบเทียบฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล $y = a^x$

กรณี a อยู่ในช่วง $(0, 1)$ เป็นฟังก์ชันลด จะได้ว่า

$$x > y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x < a^y$$

$$x < y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x > a^y$$

กรณี a อยู่ในช่วง $(1, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า

$$x > y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x > a^y$$

$$x < y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x < a^y$$

ตัวอย่าง จงพิจารณารูปต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันลดหรือเพิ่ม

1. $y = 6^x$

2. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

3. $y = (\sqrt{3})^x$

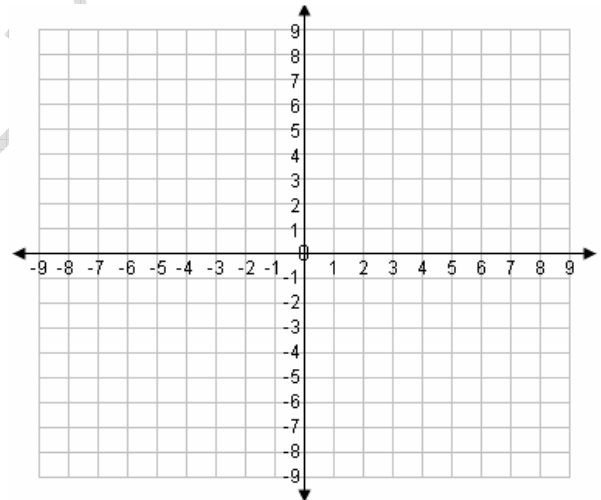
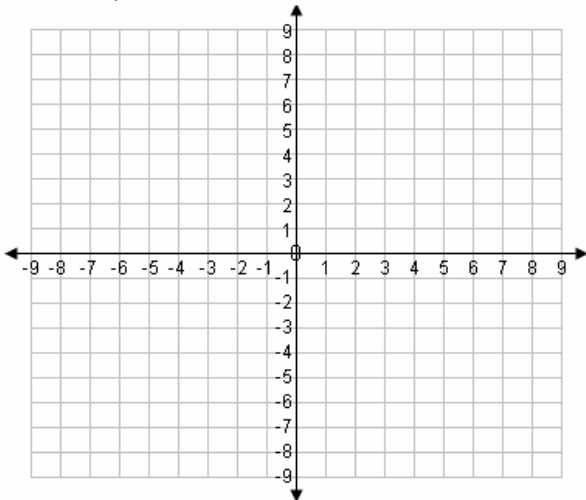
4. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x$

5. $y = 0.7^x$

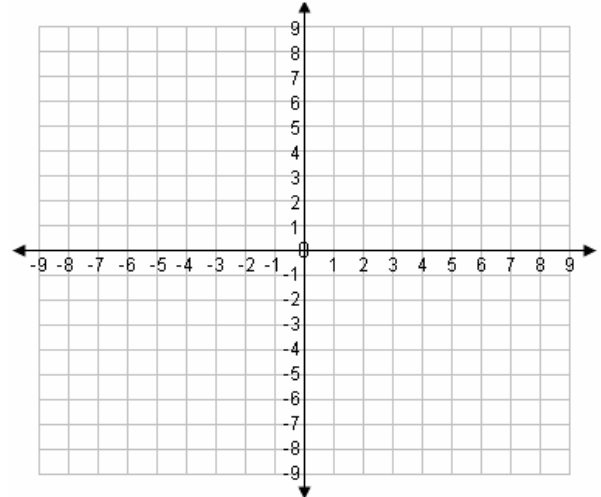
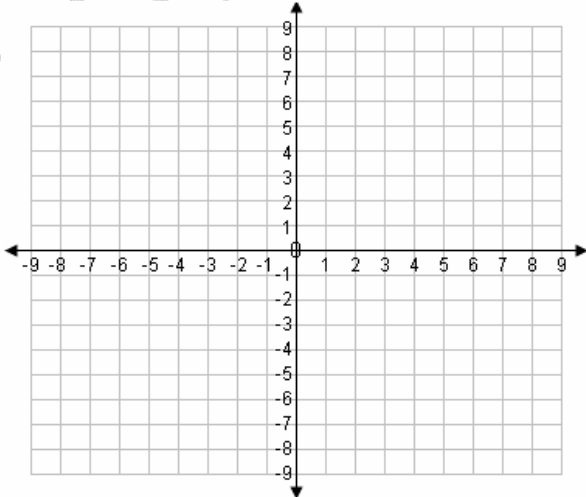
6. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x$

นอกจากนี้ยังมีกรณีของกราฟอื่น ๆ เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐาน $y = a^x$ เช่น

กราฟของ $y = a^{-x}$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

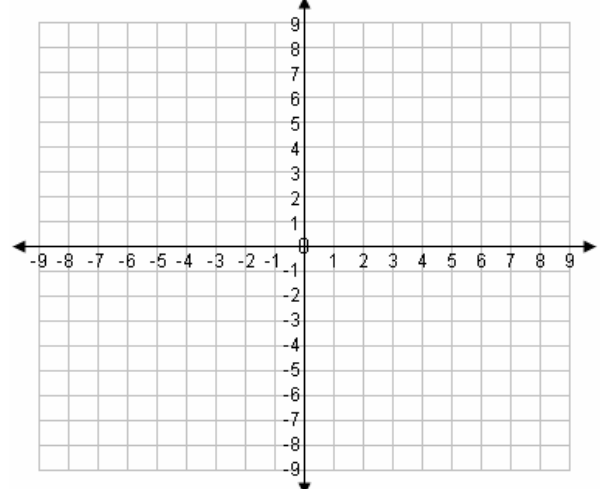
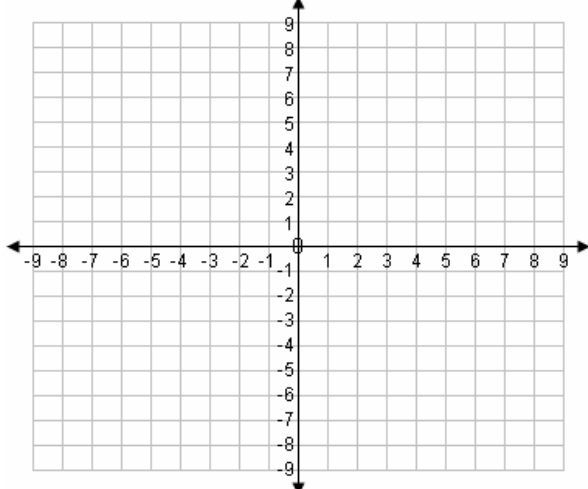


กราฟของ $y = -a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

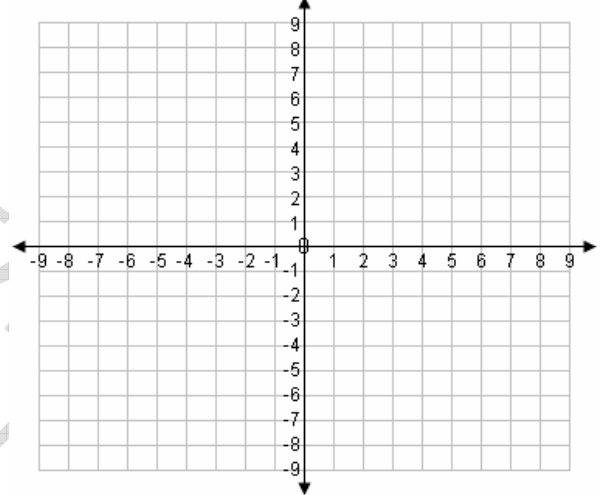
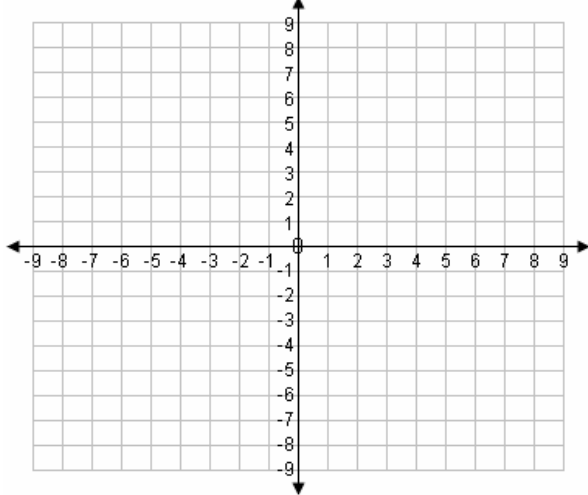


ฟังก์ชันเอกซโปเนนเชียล : Exponential Function

กราฟของ $y - k = a^{x-h}$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$



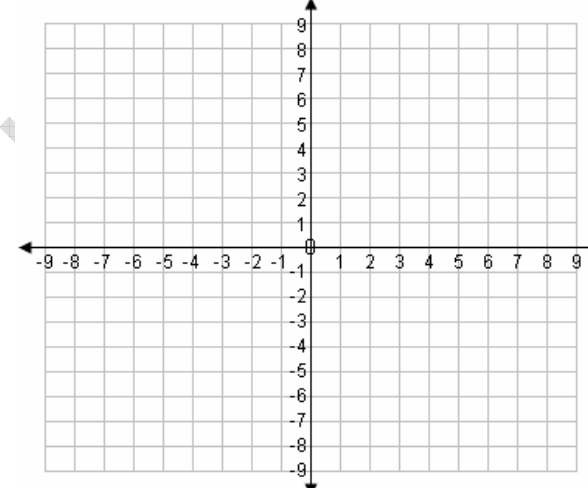
กราฟของ $y = a^{|x|}$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$



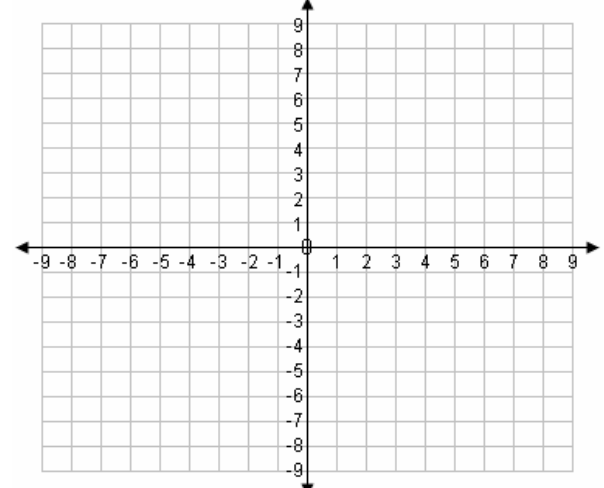
แบบฝึกหัดประกอบหัวข้อที่ 1

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

1. $y = 5^x$



2. $y = (1.5)^x$

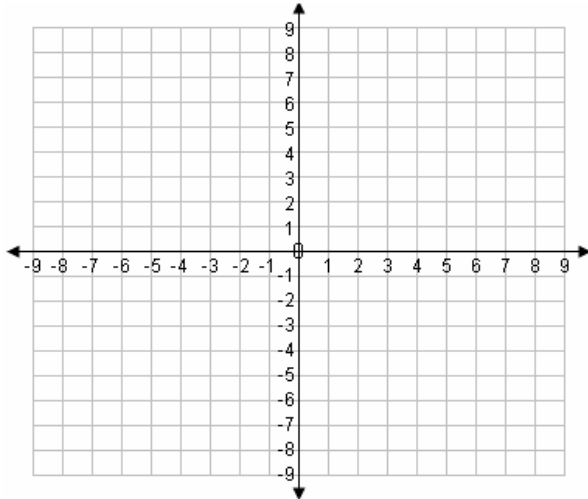


โดเมนของกราฟ คือ.....
เรนจ์ของกราฟ คือ.....

โดเมนของกราฟ คือ.....
เรนจ์ของกราฟ คือ.....

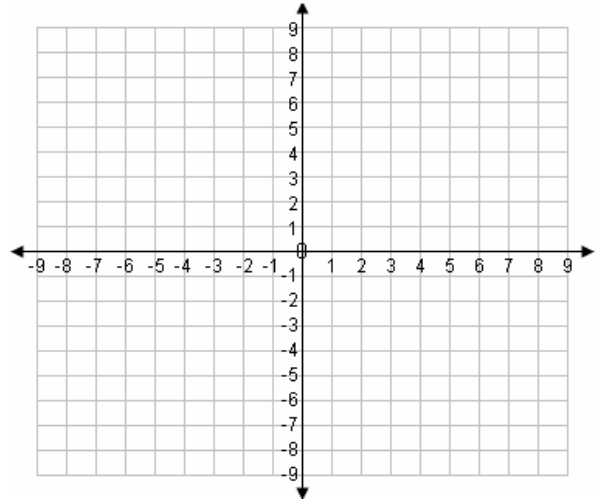
ฟังก์ชันเอกซโปเนนเชียล : Exponential Function

3. $y = (0.2)^x + 3$



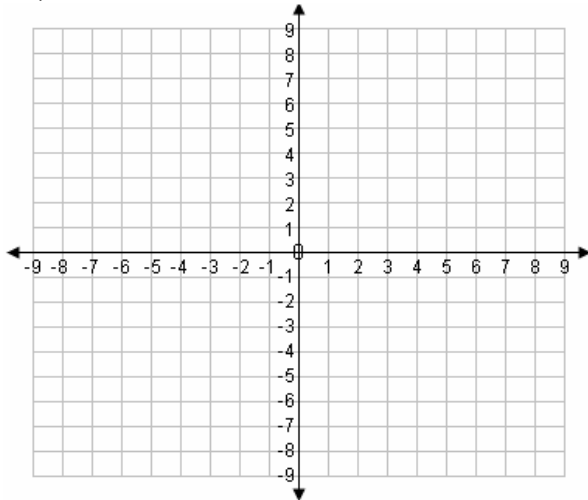
โดเมนของกราฟ คือ.....
เรนจ์ของกราฟ คือ.....

4. $y = 3^{3-x}$



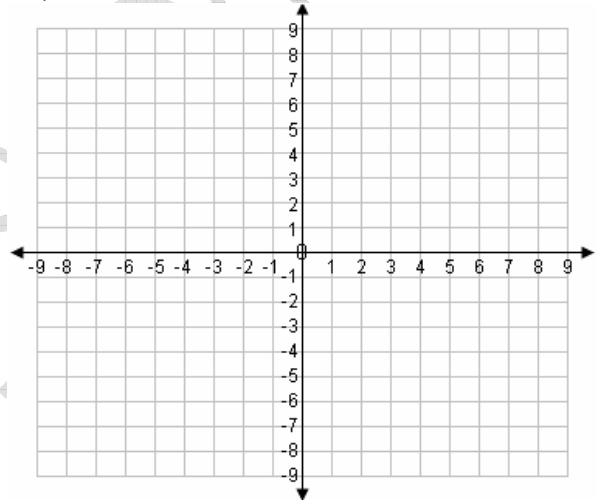
โดเมนของกราฟ คือ.....
เรนจ์ของกราฟ คือ.....

5. $y = (2.5)^{|x|} - 1$



โดเมนของกราฟ คือ.....
เรนจ์ของกราฟ คือ.....

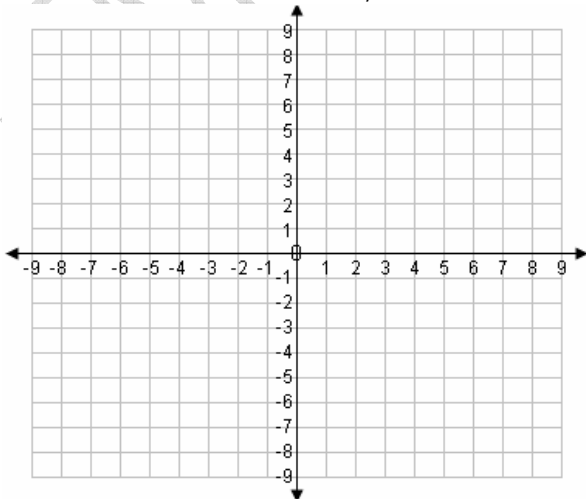
6. $y = -4^x - 2$



โดเมนของกราฟ คือ.....
เรนจ์ของกราฟ คือ.....

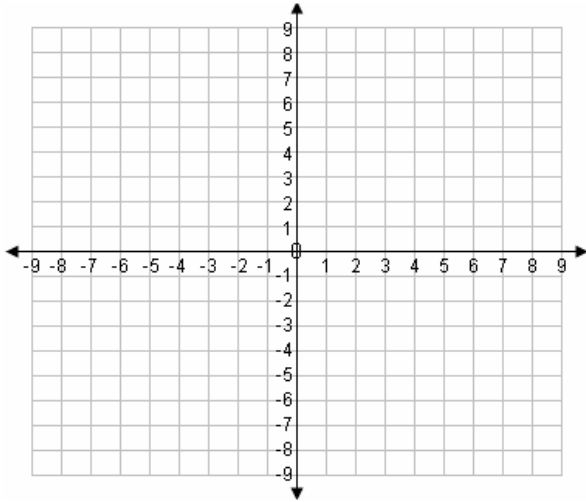
โจทย์เพิ่มเติม

1. จงเขียนกราฟของสมการ $y - 2 = 2^{x-1}$ พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน y และโดเมน - เรนจ์

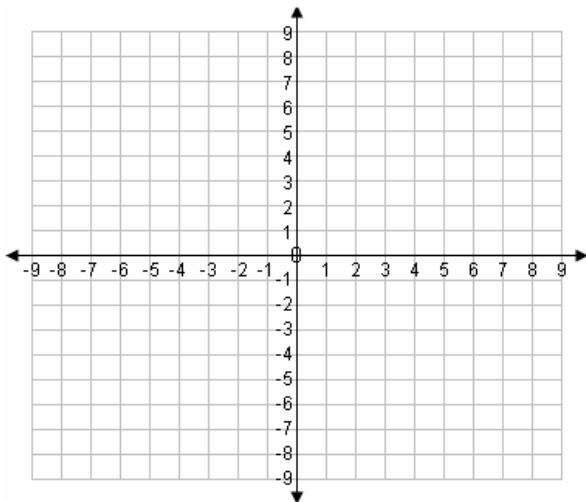


ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล : Exponential Function

2. จงเขียนกราฟของสมการ $y + 1 = 3^{x+2}$ พร้อมทั้งหาโดเมน - เรนจ์ และระยะห่างระหว่างจุดตัดแกน $x - y$



3. (วัดสุทธิ) จงเขียนกราฟของสมการ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของกราฟ



4. จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้องบ้าง

1. ถ้า $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. กราฟของ $y = 5^x$ ตัดกับกราฟของ $y = 7^x$
3. ถ้า $a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด
4. โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นเซตของจำนวนจริงบวก
5. กราฟของ $y = a^x$ เมื่อ $a \neq 0$ ผ่านจุด $(0, 1)$ เสมอ
6. กราฟของ $y = a^x$ เมื่อ $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
7. กราฟของ $y = a^{-x}$ เมื่อ $a > 1$ เป็นฟังก์ชันลด

5. ถ้า $b > 1$ และ $b^x > 1$ จงหาเซตของ x ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง

6. (ต.อ.) พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อความใดถูกต้อง

(1) ถ้า $a > 0$ จะได้ $\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\sqrt{5}} > \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\sqrt{3}}$

(2) ถ้า $a < 0$ จะได้ $\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^{\sqrt{7}} > \left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^{\sqrt{5}}$

7. กำหนดให้ $f(x) = 2^{-x}$ และ $g(x) = 3^x$ จงหาค่าของ

(1) $f(2)$

(2) $g(3)$

(3) $f(0) + g(0)$

(4) $g(4) - f(4)$

(5) $f(1) \cdot g(1)$

(6) $(f \circ g)(1)$

(7) $(g \circ f)(1)$

(8) $\frac{f(3)}{g(2)}$

2. สมการเอกซ์โปเนนเชียล

สมการเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Equation) หมายถึง สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง และมีฐานเป็นค่าคงตัว เช่น $2^3 = 8$, $4^{x^2+2x} = 1$, $3^{2x} + 3^x = 0$

การแก้สมการเอกซ์โปเนนเชียล เป็นการหาเซตคำตอบของตัวแปรซึ่งสอดคล้องกับสมการนั้น โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลังเข้ามาช่วยซึ่งอยู่บนพื้นฐานของการเป็นฟังก์ชัน 1-1 คือ

$$\text{ถ้า } a > 0 \text{ และ } a \neq 1 \text{ แล้ว } a^x = a^y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = y$$

นอกจากนั้น ยังมีสมบัติเพิ่มเติมอีกว่า

1. ถ้า $a^x = b^y$ และ $a \neq b$ แล้ว $x = y = 0$

2. ถ้า $a^x = b^x$ และ $x \neq 0$ แล้ว $a = b$

แบบฝึกหัดประกอบหัวข้อที่ 2

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาเซตคำตอบของสมการ $5^x = (25)^4$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการ $3^{3x-1} = 9^{x+2}$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left(\frac{64}{125}\right)^{x-1} = \frac{4}{5}$

4. จงหาเซตคำตอบของสมการ $8(2)^{9x} = (64)^{x+3}$

5. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-x} = 128$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $9^{3x-1} = 3^{2x-3}$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $5^{2x-3} = 625$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(16)^{x+2} - 1 = 0$

9. ถ้า $(-9)^{2x} = \frac{1}{3}$ แล้ว จงหาค่าของ $(3)^{-4x}$

10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $3^{x^2-2x} = 27^{x-2}$

11. กำหนดให้ $x > 0$ และ $x \neq 1$ จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

12. จงหาเซตคำตอบของสมการ $4^x - 2^x - 2 = 0$

13. จงหาเซตคำตอบของสมการ $4^{x+1} + 64 = 2^{x+5}$

14. จงหาเซตคำตอบของสมการ $3(9^x) + 3(9^{-x}) - 10 = 0$

15. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^{x+2} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 1$

16. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^x - 2^{\frac{x}{2}+1} + 1 = 0$

17. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = \frac{7}{8}$

18. จงหาเซตคำตอบของสมการ $5^{x-3} + 5^{2-x} = \frac{6}{5}$

19. จงหาเซตคำตอบของสมการ $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

20. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\frac{2}{2^{-2x}} + 32 = \frac{20}{2^{-x}}$

21. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$

22. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 2$

23. จงหาเซตคำตอบของสมการ $4^{x+2} - 2(4^{x+1}) = 2^{4x}$

24. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^{3x} - 14 \cdot 2^{2x} + 56 \cdot 2^x - 64 = 0$

25. จงหาเซตคำตอบของสมการ $6 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+3} = 3^{x+4} - 5^{x+4}$

โจทย์เพิ่มเติม

1. (Quo'CMU) จงหาเซตคำตอบของสมการ $10^{1+x^2} = 100^{2x}$

2. (Quo'CMU) ถ้า $4^x + 2^{2x} = 8$ แล้ว $(3x)^x$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. (Quo'CMU) จงหาค่า x จากระบบสมการ $5^x = 2^y$ และ $2^{2x+y} = 3$

4. (Quo'CMU) จงแก้สมการ $\frac{1}{2^x - \sqrt{2^{2x} - 2^x}} - \frac{1}{2^x + \sqrt{2^{2x} - 2^x}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

5. (Quo'CMU) จงหาค่า x ที่ทำให้ $2(3^{-x}) + 2(3^{-2x}) + 2(3^{-3x}) + \dots = \frac{1}{4}$

6. (Quo'CMU) กำหนดให้ $\{a_1, a_2\}$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $2^{x+2} + 2^{-x+4} = 65$ จงหาค่าของ $(a_1^2 + a_2^2)$

7. ถ้า $4(2^x)^2 + 3(2^x) - 1 = 0$ แล้ว จงหาค่าของ 25^x

8. (คณิต กข.) จงหาค่าของ x จากสมการ $5^x - 5^{x-2} = 120\sqrt{5}$

9. (คณิต กข.) จงหาค่าของ x จากสมการ $4^x - 3^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{2}} - 2^{2x-1}$

10. (คณิต ก.) จงหาค่าของ x จากสมการ $5^{x+1} + 5^{x+2} = 3775 - 5^{x-1}$

11. (คณิต ก.) ถ้า $(m^4 - 8m^2 + 16)^{2(x-1)} = (m+2)^{8x} (n-2)^{-8}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

12. (คณิต ก.) จงหาค่าของ x จากสมการ $5^{x+1} + 5^{x+2} = 3775 - 5^{x-1}$

13. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ x จากสมการ $6(2^{2x}) - 5(6^x) - 6(3^{2x}) = 0$

14. (วัดสุทธิ) จงแก้สมการ $(6 + \sqrt{35})^{2x-3} - \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$

15. (วัดสุทธิ) จงแก้สมการ $2x^{\frac{1}{5}} - 8 = x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{2}{5}}$

16. (ต.อ.) จงแก้ระบบสมการ $2^x + 2^y = 12$ และ $x + y = 5$

17. (ต.อ.) จงหาค่า x จากสมการ $4 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$

18. (ต.อ.) จงหาค่า x จากสมการ $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1} - 5^{x-1}$

19. (ต.อ.) ผลบวกของรากของสมการ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^{6x-4} = (\sqrt{5}+1)^{x^2-3x}$ เป็นเท่าใด

3. อสมการเอกซ์โปเนนเชียล

อสมการเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Inequation) หมายถึง อสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง และมีฐานเป็นค่าคงตัว

การแก้สมการเอกซ์โปเนนเชียล เป็นการหาเซตคำตอบของตัวแปรซึ่งสอดคล้องกับสมการนั้น โดยใช้หลักการของการเป็นฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่ม คือ

กรณี a อยู่ในช่วง $(0, 1)$ เป็นฟังก์ชันลด จะได้ว่า

$$x > y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x < a^y$$

$$x < y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x > a^y$$

กรณี a อยู่ในช่วง $(1, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า

$$x > y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x > a^y$$

$$x < y \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^x < a^y$$

ในกรณีที่อสมการมีฐานเป็นกลุ่มของนิพจน์ที่ไม่ทราบค่า ให้กำหนดให้ฐานอยู่ใน 3 กรณี คือ กรณีที่ฐานอยู่ในช่วง $(0, 1)$, กรณีที่ฐานเท่ากับ 1 และกรณีที่ฐานอยู่ในช่วง $(1, \infty)$ โดยให้นำคำตอบแต่ละช่วงมา intersect กับเงื่อนไขข้างต้นที่กำหนดไว้ และนำทั้งสามกรณีมา union กัน

แบบฝึกหัดประกอบหัวข้อที่ 3

จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+9}$

3. $2^{-(x^2+x)} < \frac{1}{64}$

$$4. 3^{x^2+3x+1.5} > 3\sqrt{3}$$

$$5. \text{(Quo'CMU)} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+5x+3} < \frac{1}{27}$$

$$6. 2^{|x+2|} < \frac{1}{32}$$

$$7. 4^{-\sqrt{x+2}} - 1 > 0$$

$$8. 5^{\sqrt{x+1}} - 1 < 0$$

$$9. (0.04)^{5x-x^2-8} < 625$$

$$10. \text{(วัดสุทธิ) จงหาเซตคำตอบของอสมการ} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-12x+12} < 9^{x-12}$$

11. $(x+1)^x < (x+1)^{x^2}$ เมื่อ $x > -1$

12. $(x-1)^{x^2} \leq (x-1)^{2x+3}$ เมื่อ $x > 1$

13. $(\sqrt{x})^{x^2} \leq (\sqrt{x})^{2x-1}$ เมื่อ $x > 0$

◆ 14. (ต.อ.) ถ้า $a > 1$ แล้ว เซตคำตอบของ $(a^{x^2})^{2x-7} < a^{2-7x}$ เท่ากับเท่าใด

เอกสารอ้างอิง

1. <http://www.mathcenter.net>
2. เอกสารประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล. โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย, 2548
3. สมใจ นิลเกตุ. เฉลยละเอียดข้อสอบ Quota ม.ช. เข้ามหาวิทยาลัย วิชาคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 1.เชียงใหม่, 2548
4. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค013 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง 2531). พิมพ์ครั้งที่ 14. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
5. เอกสารถ่ายสำเนา. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
6. เอกสารถ่ายสำเนา : แบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (รวมข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ กข., ก.)