ฟังก์ชันลอการิทึม

1. อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

จากเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ถ้าให้ f แทนฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล f จะมีลักษณะดังนี้

1. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$
2. f = $\{(x, y) \mid y = a^{x}, a > 0, a \neq 1\}$

เนื่องจากว่าฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (ค่า x หนึ่งค่า ให้ค่า y หนึ่งค่า) ดังนั้น อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลจึงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย ดังนี้

1. f^{-1}: $\mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$
2. f^{-1} = $\{(x, y) \mid x = a^{y}, a > 0, a \neq 1\}$

จาก $x = a^{y}$ สามารถเขียนได้ในรูปของ $y = f^{-1}(x)$ โดยเราจะกำหนดสัญลักษณ์ได้เป็น $y = \log_{a}x$ (อ่านว่า ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ หรือ ล็อกเอกซ์ฐานเอ)

ดังนั้น ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล จึงเขียนได้เป็น

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = \log_{a} x, a > 0, a \neq 1\}$$

เรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่า "**ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)**"

นิยาม ฟังก์ชันลอการิทึม คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R} \mid y = \log_{a} x, a > 0, a \neq 1\}$ เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+} \mid y = a^{x}, a > 0, a \neq 1\}$

ตัวอย่าง จงพิจารณากราฟต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันลดหรือเพิ่ม

1. $y = \log_{2} x$
2. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
3. $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} x$
4. $y = \log_{2} x^{-1}$

<u>**การเปลี่ยนฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลให้เป็นฟังก์ชันลอการิทึม**</u>

สมการ $x = a^{y}$ สามารถเขียนได้ในรูปของ $y = \log_{a} x$

ตัวอย่าง จงเปลี่ยนจำนวนต่อไปนี้ในรูปลอการิทึม หรือเอกซ์โปเนนเชียล

1. $9 = 3^{3}$ ....
2. $10{,}000 = 10^{4}$ ....
3. $7 = (49)^{\frac{1}{2}}$ ....
4. $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ....
5. $3 = \log_{5} 125$ ....
6. $\frac{1}{2} = \log_{4} 2$ ....
7. $3 = \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}$ ....

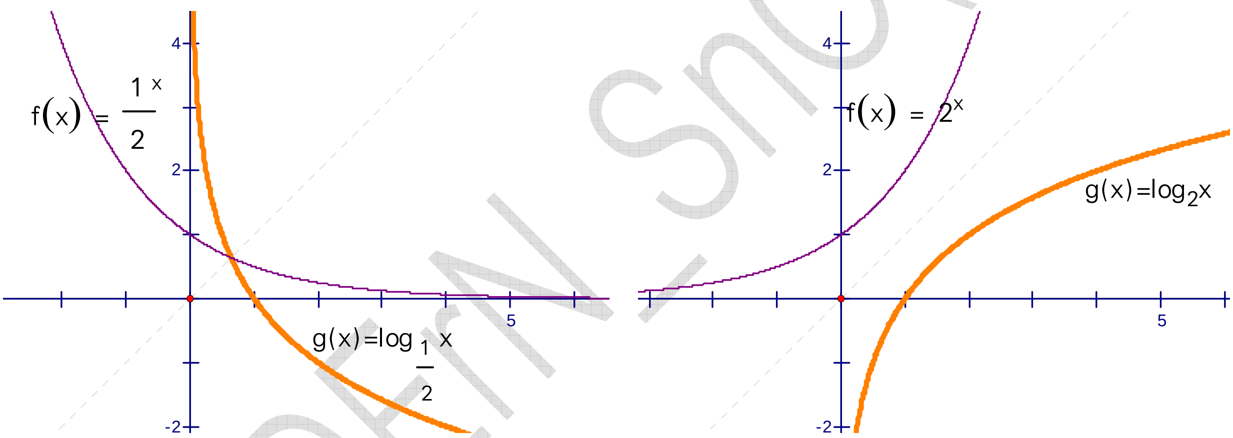
ตัวอย่าง จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ $\log_5 625 = x$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ $\log_x 8 = 3$

2. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

จากหัวข้อที่ 1 เราทราบว่าฟังก์ชันลอการิทึม เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล เราจึงสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม โดยอาศัยฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล โดยการลาก y = x ให้เป็นแกนสมมาตรได้ดังนี้

ขอให้พิจารณากราฟมาตรฐานของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลต่อไปนี้



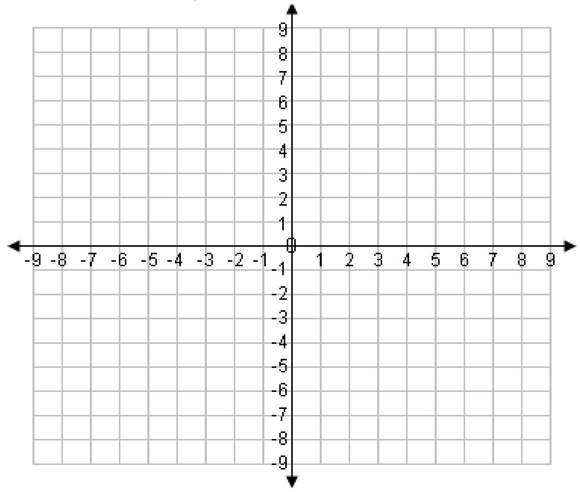
$0 < a < 1$ $\qquad$ $a > 1$

จากตัวอย่างของกราฟทั้งสองนี้ สามารถสรุปข้อสังเกตของกราฟในกรณี $y = \log_a x$; $a > 0, a \neq 1$ ได้ดังนี้

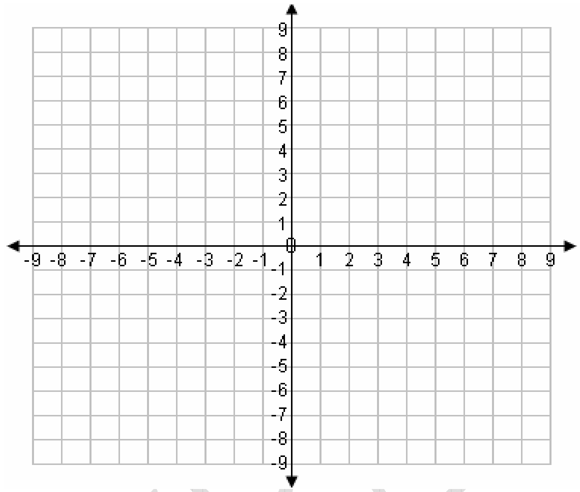
1. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม จะตัดแกน y ที่คู่อันดับ (1, 0)
2. โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม คือเซตของจำนวนจริงบวก
   เรนจ์ของฟังก์ชันลอการิทึม คือเซตของจำนวนจริง
3. กรณีที่ a อยู่ในช่วง $(1, \infty)$ แล้ว $y = \log_a x$ จะเป็นฟังก์ชันลด
   กรณีที่ a อยู่ในช่วง (0, 1) แล้ว $y = \log_a x$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม
4. ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ นั่นคือ $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ x = y
5. การเปรียบเทียบฟังก์ชันลอการิทึม
   กรณี a อยู่ในช่วง (0, 1) เป็นฟังก์ชันลด จะได้ว่า
   $x > y$ ก็ต่อเมื่อ $\log_a x < \log_a y$
   $x < y$ ก็ต่อเมื่อ $\log_a x > \log_a y$
   กรณี a อยู่ในช่วง $(1, \infty)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า
   $x > y$ ก็ต่อเมื่อ $\log_a x > \log_a y$
   $x < y$ ก็ต่อเมื่อ $\log_a x < \log_a y$

นอกจากนี้ยังมีกรณีของกราฟอื่น ๆ เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐาน $y = a^x$ เช่น

กราฟของ $y = \log_a(-x)$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

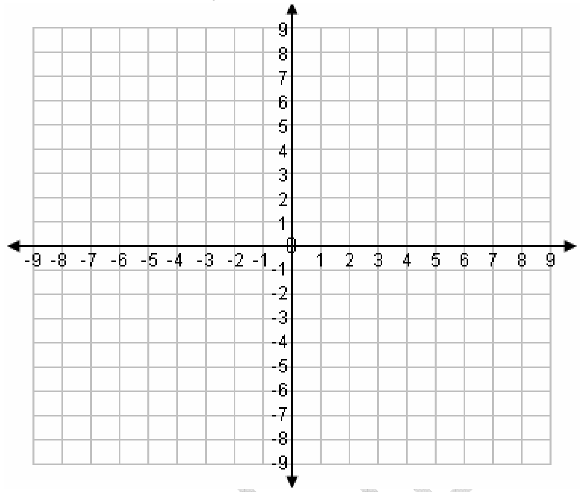


$0 < a < 1$

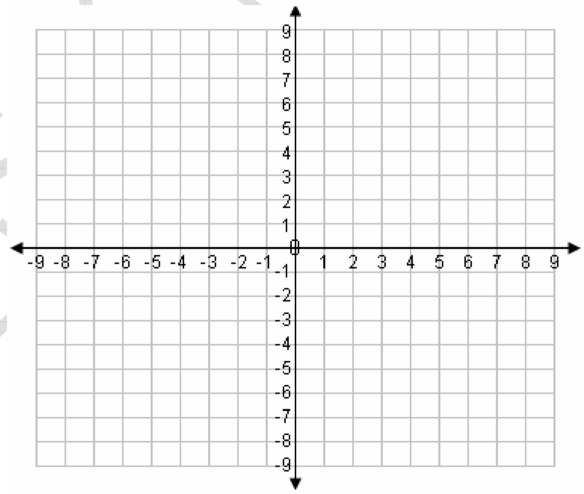


$a > 1$

กราฟของ $y = -\log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

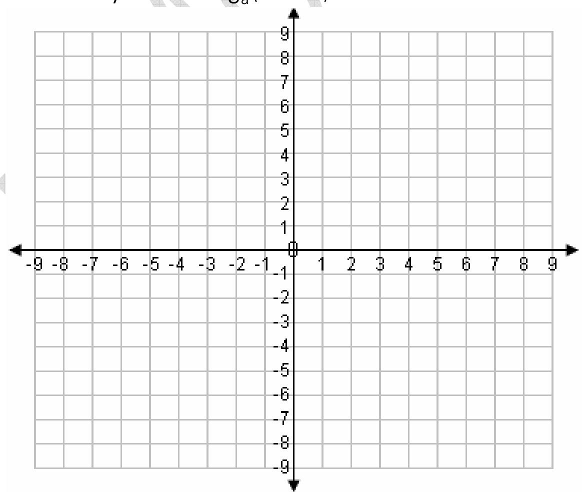


$0 < a < 1$

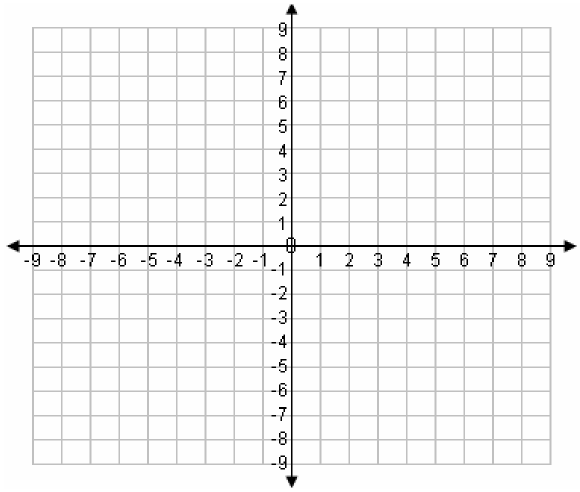


$a > 1$

กราฟของ $y - k = \log_a(x - h)$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

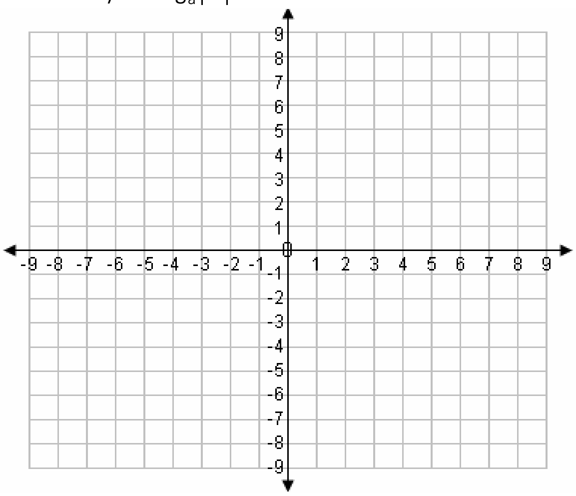


$0 < a < 1$

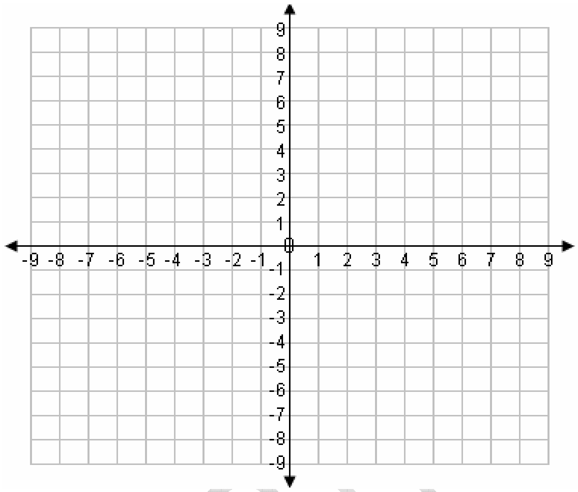


$a > 1$

กราฟของ $y = \log_a|x|$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

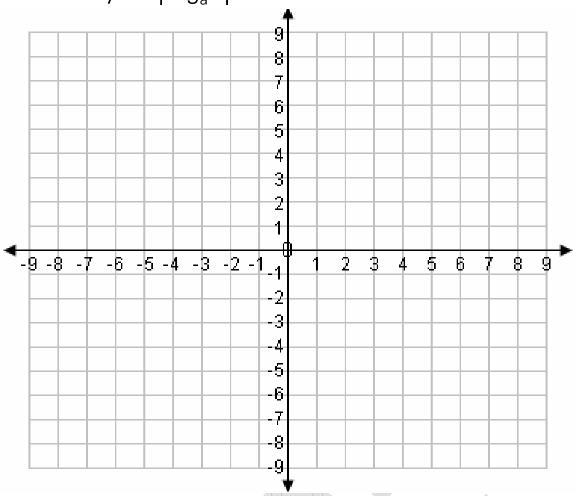


$0 < a < 1$

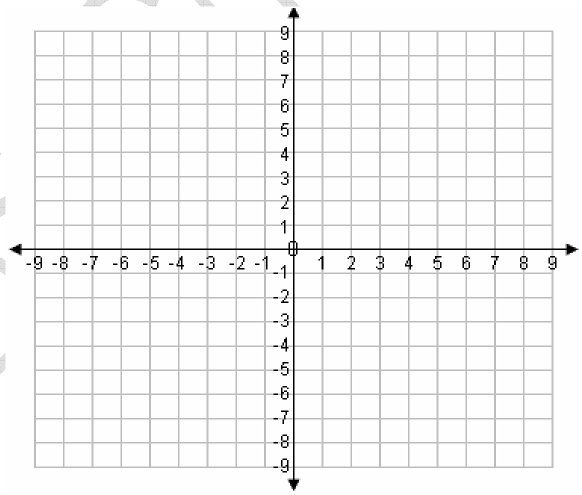


$a > 1$

กราฟของ $y = |\log_a x|$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$



$0 < a < 1$

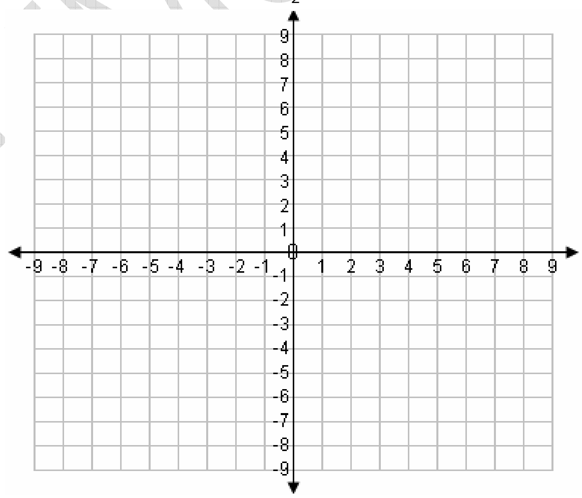


$a > 1$

แบบฝึกหัดประกอบหัวข้อที่ 2

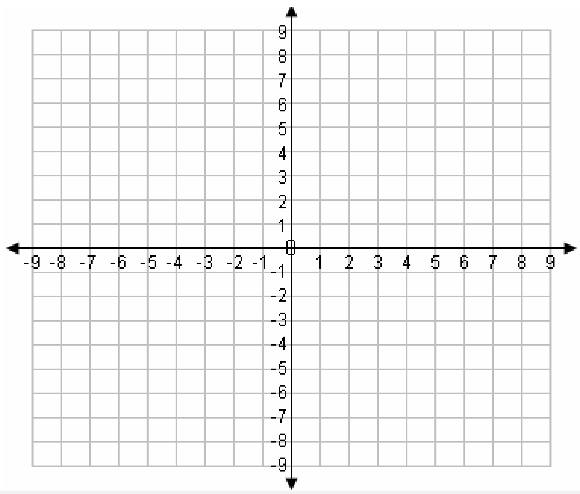
จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ลงบนแกนคู่เดียวกัน

1. $y = \log_2 x, y = \log_{\frac{1}{2}} x$



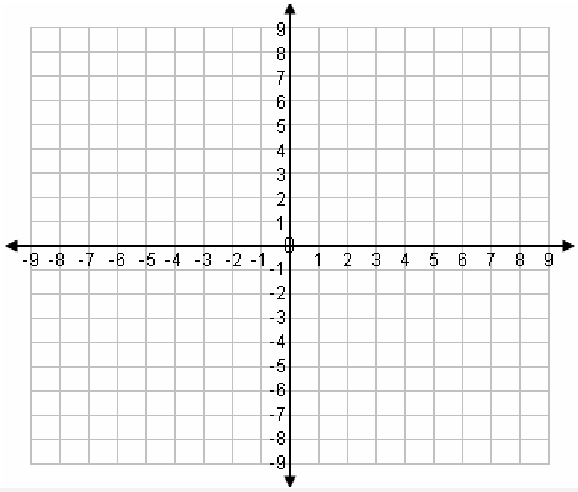
โดเมนของกราฟ คือ....................................
เรนจ์ของกราฟ คือ....................................

2. $y = \log_2 x, y = \log_2(-x)$



โดเมนของกราฟ คือ....................................
เรนจ์ของกราฟ คือ....................................

3. $y = \log_2 x, y = -\log_2 x$

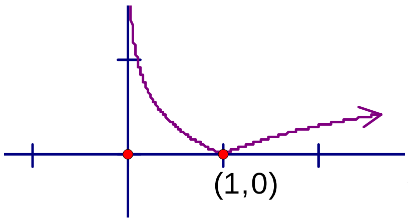


โดเมนของกราฟ คือ...................................

เรนจ์ของกราฟ คือ...................................

<u>โจทย์เพิ่มเติม</u>

1. กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟของสมการอะไร



1. $y = \log x^2$
2. $y = -\log x$
3. $y = \log |x|$
4. $y = |\log x|$

2. (คณิต กข.) ข้อความต่อไปนี้ ข้อความใดเป็นจริง
   1. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันลอการิทึม
   2. กราฟของฟังก์ชัน $y = 10^x$ และฟังก์ชัน $y = \log x$ มีลักษณะสมมาตรเทียบกับ $y = x$
   3. ส่วนตัดของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลบนแกน y เท่ากับส่วนตัดของฟังก์ชันลอการิทึมบนแกน x
   4. ถูกทุกข้อ

3. (คณิต ก.) จงพิจารณาว่าข้อใดผิด
   1. ถ้า $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
   2. กราฟของ $y = 5^x$ ตัดกับกราฟของ $y = 7^x$
   3. อินเวอร์สฟังก์ชันของ $y = e^x$ คือ $y = \ln x$
   4. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จากเซตของจำนวนจริงบวกไปทั่วถึงเซตของจำนวนจริง

4. (คณิต ก.) จงพิจารณาว่าข้อความใดถูก
   1. ถ้า $a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด
   2. โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม เป็นเซตของจำนวนจริง
   3. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จากเซตของจำนวนจริงบวกไปบนเซตของจำนวนจริง
   4. กราฟของ $y = \log_2 x$ เหมือนกับกราฟของ $x = 2^y$

5. (คณิต ก.) จงพิจารณาว่าข้อความใดถูก
   1. กราฟของ $y = a^x$ เมื่อ $a \neq 0$ ผ่านจุด (0, 1) เสมอ
   2. กราฟของ $y = a^x$ เมื่อ $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
   3. กราฟของ $y = a^{-x}$ เมื่อ $a > 1$ เป็นฟังก์ชันลด
   4. กราฟของ $\log(x^2 - x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริงบวก จะผ่าน (1, 0) เสมอ

3. คุณสมบัติของลอการิทึม

กำหนดให้ M, N เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้สมบัติเบื้องต้น 6 ข้อดังต่อไปนี้

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^p = p \cdot \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a M} = M$

ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้โดยสมบัติของเลขยกกำลัง ดังนี้

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\log_a M = x$ และ $\log_a N = y$

จะได้ว่า $M = a^x$ และ $N = a^y$

ดังนั้น $MN = a^x \cdot a^y$

$MN = a^{x+y}$

จะได้ $\log_a MN = x + y$

$\therefore \log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\log_a M = x$ และ $\log_a N = y$

จะได้ว่า $M = a^x$ และ $N = a^y$

ดังนั้น $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y}$

$\frac{M}{N} = a^{x-y}$

จะได้ $\log_a \frac{M}{N} = x - y$

$\therefore \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3. $\log_a M^p = p \cdot \log_a M$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\log_a M = x$

จะได้ $M = a^x$

ดังนั้น $M^p = (a^x)^p$

$M^p = a^{xp}$

จะได้ $\log_a M^p = xp$

$\log_a M^p = px$

$\therefore \log_a M^p = p \cdot \log_a M$

4. $\log_a a = 1$

พิสูจน์ ให้ $\log_a a = x$

จะได้ $a^x = a$

ดังนั้น $x = 1$

$\therefore \log_a a = 1$

5. $\log_a 1 = 0$

พิสูจน์ ให้ $\log_a 1 = x$

จะได้ $a^x = 1$

ดังนั้น $x = 0$

$\therefore \log_a a = 0$

6. $a^{\log_a M} = M$

พิสูจน์ ให้ $a^{\log_a M} = x$

จะได้ $\log_a x = \log_a M$

ดังนั้น $x = M$

$\therefore a^{\log_a M} = M$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\log_5 125$

จงหาค่าของ $\log_2 \frac{1}{128}$

จงหาค่าของ $\log_4 (\log_2 16)$

การเปลี่ยนฐานลอการิทึม

เราสามารถเปลี่ยนฐานของลอการิทึมจากฐานหนึ่ง ไปยังอีกฐานหนึ่งที่เราต้องการได้ มีประโยชน์สำหรับการคิดคำนวณ จะอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท	ถ้า $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ และ x เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

โดยปกติทั่วไป เรามักจะเปลี่ยนในรูปลอการิทึมฐานสามัญ (ฐานสิบ)

พิสูจน์ ให้ $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

จะได้ $x = a^y$

ดังนั้น $\log_b x = \log_b x^y$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

$= y \log_b a$

จะได้ $y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$\therefore \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\log_3 7 = 1.771$ จงหาค่าของ $\log_9 7$

<u>หมายเหตุ</u> ลอการิทึมฐานสิบ ไม่นิยมเขียนกำกับฐาน เรียกว่า ลอการิทึมสามัญ

คุณสมบัติเพิ่มเติมเกี่ยวกับลอการิทึม

กำหนดให้ M, N เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

1. $\log_{a^p} M = \frac{1}{p} \cdot \log_a M$
2. $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$
3. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

แบบฝึกหัดประกอบหัวข้อที่ 3

จงแสดงวิธีทำต่อไปนี้

1. จงเปลี่ยนเลขยกกำลังต่อไปนี้เป็นลอการิทึม หรือเปลี่ยนลอการิทึมเป็นเลขยกกำลัง
   1. $8^2 = 64$
   2. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
   3. $(64)^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$
   4. $\log_{0.5} 8 = -3$
   5. $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$
   6. $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$
2. จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้
   1. $\log_4 1024$
   2. $\log_{25} 0.008$
   3. $\log_5 125\sqrt{5}$

4. $\log_5 8$

5. $\log_{\sqrt{7}} 2401$

6. $\log_{9\sqrt{3}} 0.1$

7. $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{4}$

3. จงหาค่าของ

1. $\log_2 \sqrt[5]{64}$

2. $\log \dfrac{\sqrt[4]{5}\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}$

3. $\log_{10} 35 + \log_{10} 6 - \log_{10} 7 + \log_{10} 10 - \log_{10} 3$

4. $\log 20 + 7\log\dfrac{15}{16} + 5\log\dfrac{24}{25} + 3\log\dfrac{80}{81}$

5. $16\log\dfrac{10}{9} - 4\log\dfrac{25}{24} - 7\log\dfrac{80}{81}$

6. $2\log_a 7-\log_a 21+\log_a 6-\log_a 14$

7. $\dfrac{\log\sqrt{27}+\log\sqrt{8}-\log\sqrt{125}}{\log 6-\log 5}$

8. $\log(a-b)+\log(a+b)-\log(a^2-b^2)+\log a^2-\log b^2$ เมื่อ a = 20, b = 2

9. $(\log_2 8)(\log_3 81)+4\log 400-\log 256$

10. $\log_8 64+\log_4 64-\log_3 27-5$

11. $\log_8 128\times\log_4 0.25$

12. $\log 45$ ในเทอม a, b ถ้ากำหนดให้ $\log 2=a$ และ $\log 3=b$

13. $\log 27$ ในเทอม a, b, c ถ้ากำหนดให้ $\log 28=a$,$\log 21=b$ และ $\log 25=c$

14. $\frac{1}{\log_a abc}+\frac{1}{\log_b abc}+\frac{1}{\log_c abc}$

15. $\log 8^{2+\log_2 5}$

4. จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า $x=\log_a(a-by)-\log_a y$ แล้ว $y=\frac{a}{a^x+b}$

2. $\log_a d=\log_a b\times\log_b c\times\log_c d$

3. $2(\log\sqrt{125}+\log 125-\log\sqrt{1000})=3(2-3\log 2)$

4. $2\log_7 343=3\log_3 9$

5. $\log 3^3\log_3 2-\log 8$

6. ถ้า $\dfrac{2}{\log_b N} = \dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_c N}$ แล้ว $b^2 = ac$

7. ถ้า $\log_a x = A\log_a y$ แล้ว $\log_b x = A\log_b y$

5. จงหาค่าของ

1. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{127} 128$

2. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{127} 128$

3. $\dfrac{\log_7 \sqrt{125} + \log_7 \sqrt{27} - \log_7 \sqrt{64}}{\log_7 15 - \log_7 4}$

<u>โจทย์เพิ่มเติม</u>

1. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ $\log_5(\log_3 2^7) - \log_5(\log_3 2^3) + \log_2 2^{\log_5 \frac{3}{7}} + 4^{3\log_4 3 - \frac{1}{3}\log_2 27}$

2. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ $8^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[6]{25}} + 4^{\frac{1}{\log_5 2}} + 4^{\frac{1}{\log_7 8}}$

3. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 1296 - 3\log 3 + \frac{1}{4}\log 81 - 2$

4. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ $(\log_3 5)(\log_{25} 81)(\log_{\sqrt{9}} 7)(\log_{49} 36)(\log_{\sqrt{6}} 3)(\log_3 \frac{5}{9}) - \log_5 5^{\log_3 5}$

5. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ $36^{1-\log_6 3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 2}$

6. (วัดสุทธิ) จงหาค่าของ $\log_2(\log_3 10^{12}) - \log_2(\log_3 10^3) - (\log_3 27)(\log_2 \frac{1}{8})$

7. (วัดสุทธิ) กำหนดให้ $A = \left[\sqrt[3]{\sqrt[4]{8^{-1}}}\right]^{16}$ แล้ว จงหาค่าของ $\log_4(\log_{\frac{1}{2}} A)$

8. (ต.อ.) จงหารูปอย่างง่ายของ $\dfrac{1-(\log_a x)^3}{[\log_a x+\log_x a]\log_a\left(\dfrac{a}{x}\right)}$ กำหนดให้ $a > 0,\ x > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 1$

9. (ต.อ.) ค่าของ $\log_2 16\times\log_5\dfrac{1}{25}-\log_{27} 9\times\log_2\dfrac{1}{8}+\log_{27} 3\times\log_8 4$ เท่ากับเท่าใด

10. ถ้า $\log_{\log 12} 7 = x, \log_{\log 13} 5 = y, \log_{\log 12} 7 = z$ จงเรียงลำดับค่า x, y, z จากมากไปหาน้อย

11. กำหนดให้ $\log_a b = 6$ ค่าของ $xy(\log_a b)+\log_a b^{xy}+\log_a b^{x}$ มีค่าเท่าใด

12. จงหาค่า x จาก $2\log_x\left(\dfrac{5}{2}\right)-\log_{x^2}\left(\dfrac{25}{81}\right)+\log_{\sqrt{x}}\left(\dfrac{2}{5}\right)+5\log_{x^{10}}\left(\dfrac{16}{9}\right)=1$

13. (คณิต กข.) กำหนดให้ $\log_2\sqrt{x}+\log_x\sqrt{2}=\sqrt{2}$ ค่าของ $\log_2 x$

14. (คณิต กข.) ค่าของ $8^{\frac{1}{3}+\log_{\frac{1}{2}}5+\log_{16}100}$ เท่ากับเท่าใด

15. (คณิต ก.) จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2\log_3\left(\log_5 125^{(x-1)}\right)=2$

16. (คณิต ก.) ค่าของ $\log_3\left(\sqrt[6]{27\sqrt[6]{81}}\right)^{\frac{1}{11}}$ เท่ากับเท่าใด

17. (คณิต ก.) กำหนดให้ $\log_3(\log_{10} x)=1$ แล้ว ค่าของ x เท่ากับเท่าใด

18. (คณิต ก.) กำหนดให้ $\log_8(x-6)+\log_8(x+6)=2$ แล้ว ค่าของ x เท่ากับเท่าใด

<u>ข้อสอบโควตา ม.ช.</u>

1. จงหาโดเมนของ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\log x}$

2. ถ้า $\log_{27}(x-1)-\log_{9}(x-1)=\frac{1}{6}$ แล้ว จงหาค่าของ x

3. ถ้า $(\log_{3x} y^{3})(\log_{5} 3x)=\log_{x} x^{3}$ แล้ว จงหาค่าของ y

4. ค่าที่ไม่ติดลอการิทึมของ $6\log 5-\log 4+\log 10^{8\log 2}$ เท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ $\log_{27} 3=a, \log_{2} b=-3, \log_{c} \frac{9}{4}=-2$ จงหาค่าของ a + b + c

6. กำหนด $\log_{30} 4=a, \log_{30} 5=b$ แล้ว จงหาค่าของ $\log_{30} 9$

7. กำหนด $\log_{a} x=2, \log_{b} x=-1, \log_{c} x=\frac{2}{5}$ แล้ว จงหาค่าของ $\log_{abc} x$

8. กำหนด $a = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ จงหาค่า y เมื่อ $y = 3^{2a+1} - 1$

9. จงหาผลบวกรากของสมการ $[\log_3(x+1)]^2 - 7[\log_3(x+1)] = \log_3\left(\dfrac{1}{3^{12}}\right)$

โปรดติดตาม.....

- ลอการิทึมสามัญ
- แอนติลอการิทึม
- ลอการิทึมธรรมชาติ
- สมการลอการิทึม
- อสมการลอการิทึม
- การประยุกต์ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึมในธรรมชาติวิทยาศาสตร์

ในเอกสารชุดต่อไป...เร็วๆนี้

เอกสารอ้างอิง

1. http://www.mathcenter.net
2. เอกสารประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม. ฟังก์ชันลอการิทึม. โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย, 2548
3. สมใจ นิลเกตุ. เฉลยละเอียดข้อสอบ Quota ม.ช. เข้ามหาวิทยาลัย วิชาคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 1.เชียงใหม่,2548
4. เอกสารถ่ายสำเนา. Logarithm
5. เอกสารถ่ายสำเนา : แบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (รวมข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ กข., ก.)